10 | 2019
VDI fachmedien
www.bauingenieur.de

Bauingenieur

Organ des VDI für Bautechnik

SONDERDRUCK
aus Heft 10 / 2019,
Seiten 353 bis 365

Biegetorsion in der Stahlbaupraxis heute – modern, universell und zuverlässig

A. Rubert

WOLF Gruppe und ConSteel – innovativ in die Zukunft

Angefangen mit einem kleinen Bauunternehmen im österreichischen Scharnstein hat sich die WOLF Gruppe in über 50 Jahren zu einem international tätigen Unternehmen mit 25 Standorten in 19 Ländern entwickelt. In den Sparten Gewerbe- und Industriebau, Stahlbau, Agrarbau, Hausbau sowie dem Behälterbau werden individuelle Lösungen geboten. Verschiedenste Kundenanforderungen werden mit der Verwendung von Stahl, Holz, Beton und wirtschaftlich durchdachten Werkstoffkombinationen getroffen.

Im Stahlbau gehört die Wolf System GmbH mit einer Verarbeitung von über 30.000 Tonnen Profilstahl zu einem der leistungsstärksten Betrieben am europäischen Markt. In den mit CNC automatisiert gesteuerten Produktionsstätten werden standardisierte Stahlkonstruktionen, Spezialkonstruktionen im Messe- und Eventbau sowie Anlagenbau gefertigt.

Sämtliche Planungsleistungen von der Tragswerks- bis zur Werkstattplanung werden im betriebseigenen Planungsbüro erledigt. Dabei wird das wirtschaftliche Denken in allen Leistungsphasen großgeschrieben. Wesentlicher Bestandteil der Planungsphase ist die Erstellung der statischen Berechnung, angefangen bei der einfachen Stahlhalle bis hin zu komplexen Stahl-Sonderkonstruktionen.

Mit der Entwicklung des Unternehmens sind die Ansprüche der Kunden und die Komplexität der Projekte gestiegen. Für uns ist es daher unumgänglich geworden, die altbewährten und teilweise selbstentwickelten 2D-Statikprogramme zu reevaluieren und sich mit Software-Lösungen, die über den neusten Stand der Technik und aktuellen Methoden der 3D Betrachtungen verfügen, zu beschäftigen.

Nach längerem Vergleich einiger Bemessungsprogramme für den Stahlbau ist die Entscheidung letztendlich auf das Softwarepaket von **ConSteel** gefallen.

Dieses Softwarepaket hat die von uns gestellten Anforderungen eindeutig getroffen: eine benutzerfreundliche, intuitive Bedienung sowie übersichtliche graphische Darstellungen, die dem Benutzer Schwachstellen des gewählten Systems unter der Berücksichtigung der wirtschaftlichen Faktoren eindeutig aufzeigen. Die Bemessungen (integrierte Analyse und Standardnachweise nach EC) erfolgen zudem nach den modernsten wissenschaftlichen Erkenntnissen.

Im vergangenen Jahr haben wir die Lizenzen von **ConSteel** erworben. Um die Grundlagen der umfangreichen Software zu erlernen und die dazugehörige Theorie der Bemessungsverfahren zu verstehen wurde eine intensive einwöchige Grundlagenschulung beim Ingenieurbüro Pollmann in Ascheberg unter Mitwirkung von Herrn Prof. Dr.-Ing. Achim Rubert abgehalten. Dank der übersichtlichen Gestaltung der Benutzeroberfläche und der intuitiven Bedienung konnten sehr schnell Fortschritte erzielt werden.

Die Erfahrungen der vergangenen Monate in der Praxis haben sich ebenfalls als überaus positiv erwiesen. Komplexe Systeme können spielend simuliert und wirtschaftlich optimiert werden. Die Erstellung von Tragfähigkeitsnachweisen in 2D- sowie 3D-Tragstrukturen sind jetzt in einer Software möglich.

Das Ziel der Wolf System GmbH in den nächsten Jahren besteht darin, die Software von **ConSteel** noch besser in das firmeninterne Projekt „WOLF BIM„ zu integrieren, welches die Vereinheitlichung der Planungsprozesse über sämtliche Abteilungen vorsieht. In Zukunft sollen dazu bidirektionale Schnittstellen zu den 3D-CAD Programmen hergestellt werden. Dazu hat bereits ein Treffen der IT-Entwickler der Firma Wolf mit dem Entwicklerteam von **ConSteel** stattgefunden.

Zusammengefasst haben wir mit **ConSteel** einen innovativen und zuverlässigen Partner gefunden. Mit der eindrucksvollen, graphisch dreidimensionalen Benutzeroberfläche mit vier Modellansichten, der komplexen Analyse unter Berücksichtigung der Wirkung aller internen Kräfte (Normalkraft, Biegemomente, Torsionsmoment und Wölbbimoment) nach Theorie 2. Ordnung sowie der Methoden der modernen Strukturanalyse sind alle Anforderungen erfüllt, die wir an die Software gestellt haben.

Wolf System GmbH

Gez. Raphael Herrmann

Bei diesem Beitrag handelt es sich um einen wissenschaftlich begutachteten und freigegebenen Fachaufsatz („reviewed paper").

Biegetorsion in der Stahlbaupraxis heute – modern, universell und zuverlässig

A. Rubert

ZUSAMMENFASSUNG Bei ebenen und räumlichen Stahltragwerken mit freitragenden oder stabilisierten Trägern aus dünnwandigen offenen Profilen sind meistens die Biegedrillknicknachweise bemessungsrelevant. Moderne und universell anwendbare Nachweismethoden gegen Biegedrillknicken benötigen schnelle FEM-Programme mit einem 7DOF-Balkenelement, das die elastische Biege(wölbkraft)torsion 2. Ordnung beherrscht, da allgemein verwendbare baupraktische Formeln zur Berechnung der Beanspruchungen oder der kritischen Beanspruchungen beliebiger Einwirkungskombinationen nicht existieren und Nachweise mit Schalenelementen baupraktisch viel zu zeitaufwendig sind.
Mit zwei (in der Literatur empfohlenen) Evaluationsbeispielen und zwei weiteren Beispielen sowie zahlreichen Referenzen zu bereits publizierten ergebnisvergleichenden Fallstudien qualifiziert sich nur ein FEM-Programm als eine hervorragende und wohl auch einzige deutschsprachige kommerzielle 2D/3D-Stabstatiksoftware zu vollumfänglichen und korrekten statischen und dynamischen Berechnungen der Theorie 2. Ordnung.

STICHWÖRTER
Stahlbau, Biegetorsion, FEM-Programme

Bending torsion in steel construction practice today- modern, universal and reliable

ABSTRACT Lateral torsional buckling (LTB) checks of plane and spatial steel structures with thin-walled open cross sections are relevant and thus considered necessary in most steel structures. Implementation of LTB checks require fast state-of-the-art and universally applicable FEM software with a seven degrees of freedom (7DOF) beam element that enables full implementation of the elastic 2nd order Bending-Warping-Torsion Theory. This is required, because general formulas for the eight internal forces and/or the critical bending moment distribution do not exist. Exemplified by four evaluation case studies (proposed in literature) and several additional references of published calculation results of different steel structures, only one commercial software qualifies as a successful, universal and excellent solution for static and dynamic calculations as well as for local and global stability checks according to DIN EN 1993–1–1/3/8.

1 Einleitung

Die Biegewölbkrafttorsion ist in der Stahlbaupraxis wenig bekannt zumindest aber unbeliebt. Zwar gilt der Grundsatz, den Lastabtrag durch planmäßige Torsion möglichst zu vermeiden, da dies im Vergleich zum Lastabtrag mit Normalkraft und/oder Biegung unwirtschaftlich ist. Da aber im Stahlbau oft dünnwandige offene Profile (z.B. auf Biegetragfähigkeit optimierte Walzprofile wie IPE oder HEA) auftreten, kann die Anwendung der einfachen St. Venant'sche Torsion zu erheblich von den korrekten Werten abweichende Schnittgrößen führen. Hier ist die vollständige Torsion (St. Venant'sche Torsion plus Wölbkrafttorsion) notwendig, was schnell zu baupraktischen Komplikationen führt, da bereits bei der Theorie 1. Ordnung allgemeine analytische Lösungen nicht existieren und es der Stahlbauingenieur mit – je nach baustatischem Fall (Lagerungsbedingungen, Einwirkungskombinationen) – unterschiedlichen und recht aufwendigen trigonometrischen Formeln zu tun bekommt [1], [2].

Bei Doppelbiegung (mit/ohne Normalkraft) ist die Einbeziehung der Torsion (auch ohne Torsionseinwirkungen und/oder Lastausmitten!) nicht mehr vermeidbar, denn Verformungen in Richtung der beiden senkrecht zueinanderstehenden Hauptachsen führen unweigerlich zu zusätzlichen Torsionsbeanspruchungen (Querschnittverdrehungen und Torsionsmomente). In der Praxis werden jedoch häufig die Momente um beide Biegeachsen getrennt nach der Theorie 1. Ordnung berechnet und die Beanspruchungen superponiert. Die sich daraus ergebenden Querschnittsbeanspruchungen (Biegenormalspannungen und Schubspannungen aus Querkräften) sind in der Regel nicht korrekt (Ausnahme: geschlossene Querschnitte und geringe Durchbiegungen). Allgemein kann man sagen, dass bei Doppelbiegung offener Querschnitte die Anwendung der Biegetorsionstheorie 2. Ordnung (Gleichgewicht am mäßig verformten System) zwingend erforderlich ist, um tragsichere und wirtschaftliche Ergebnisse zu erhalten. Sie führt zu miteinander gekoppelten Stabdurchbiegungen und Querschnittsverdrehungen, was zu acht inneren Beanspruchungen (Normalkraft, zwei Biegemomente, zwei Querkräfte, primäre und sekundäre Torsionsmomente und Wölbbimoment) im Querschnitt führt. Insbesondere das Wölbbimoment kann zu erheblichen zusätzlichen Normalspannungen im Querschnitt führen und darf deshalb gegenüber den Biegemomenten und der Normalkraft nicht vernachlässigt werden.

Aber auch schon bei einfachen Biegeträgern mit doppelt- oder einfachsymmetrischen offenen Querschnitten und Biegebeanspruchungen um die starke Achse ist die Biegetorsion 2. Ordnung unvermeidbar, denn unplanmäßige seitliche Trägervorkrümmungen

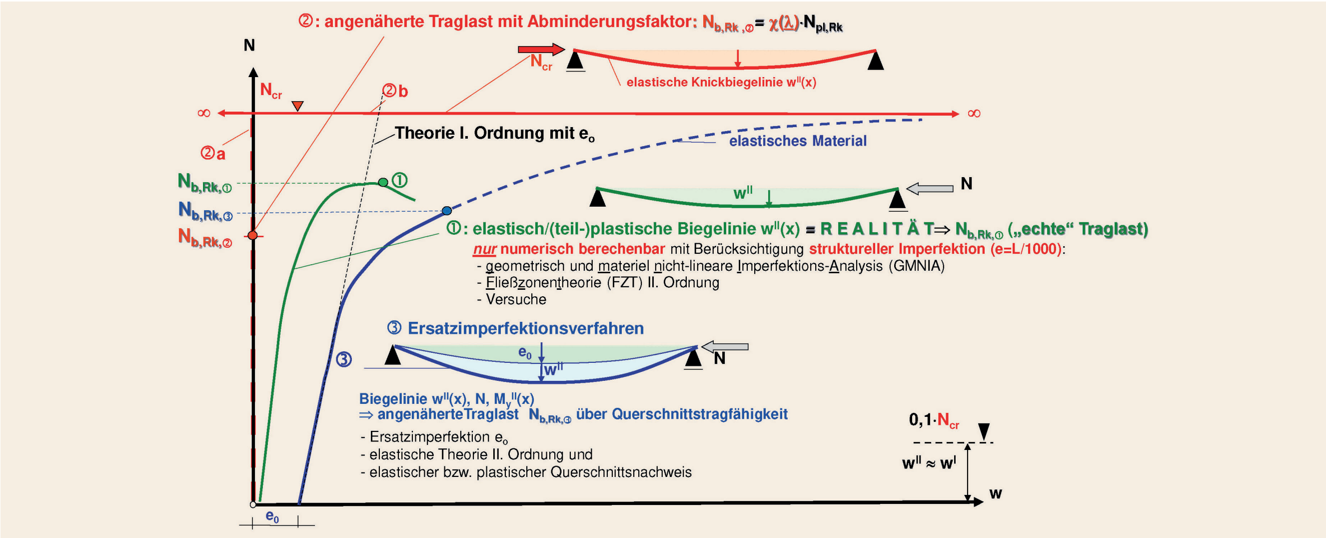


Bild 1. Die drei rechnerischen Methoden zur Ermittlung der Traglast *Abb.: Rubert*
Fig. 1. Three methods of calculation the ultimate load bearing capacity *Source: Rubert*

und/oder Abweichungen der Querschnittsnennwerte sowie die Trägereigenspannungen führen zu ungewollten Exzentrizitäten (sog. strukturelle Imperfektionen) aus der Symmetrieebene (z-Achse), wodurch die planmäßigen Vertikallasten zusätzliche Querschnittsverdrehungen und damit auch Querbiegung und Torsion verursachen.

Seit Jahrzehnten hat sich – auch gestützt durch die Stahlbaunormen – bei einfacher Biegung um die starke Achse der Biegedrillknicknachweis als Ersatz der Biegetorsion 2. Ordnung durchgesetzt. Die einfache Nachweisführung durch Anwendung von Formeln oder Tabellenlösungen ist auch heute noch für einfache Träger sehr beliebt. Die Herleitung der benötigten Formeln führt mathematisch aber auf die gleichen Probleme wie bei der direkten Anwendung der Biegetorsion 2. Ordnung, denn man benötigt den kritischen elastischen Biegemomentenverlauf $M_{y,cr}(x)$, um die Schlankheit λ_{LT} des Biegedrillknickens berechnen zu können. Bis auf den Sonderfall des gabelgelagerten Einfeldträgers mit konstantem Momentenverlauf gibt es keine analytisch exakten Lösungen für M_{cr}. Zwar wurden über die Energiemethode (und z. T. mit zusätzlicher Verwendung von FEM-Ergebnissen) zahlreiche Formeln, Berechnungsprozeduren und Tabellenbücher entwickelt, aber deren Genauigkeiten sind nicht immer bekannt oder die Lösungen sind zum Teil von den korrekten Werten grob abweichend ([3], Abschnitt 6.8). Die Anwendungsspektren dieser Hilfsmittel sind auf geradlinige Einzelträger und Mehrfeldträger mit einfachen Einwirkungen, Momentenlinien und Lagerungsbedingungen beschränkt.

Bild 1 zeigt anhand eines einfachen Knickstabes, welche prinzipiellen Nachweismethoden zur Verhinderung des Stabilitätsversagens (Biegeknicken, Drillknicken, Biegedrillknicken) eines Stabes oder stabartigen Tragwerks aus Baustahl möglich sind:

① **Reales Tragverhalten:**

Wenn man idealerweise das elastisch-plastische Last-Verformungsverhalten (① in grün dargestellt) kennt, kann man daraus den höchsten Punkt der Last-Verformungslinie als die „wahre" Traglast $N_{B,Rk,①}$ bestimmen. Für einfache Stäbe oder kleine Tragwerke sind dazu sehr aufwendige Versuche möglich oder es kommen besonders komplexe FEM-Programme (wie z. B. ANSYS) zur geometrisch und materiell nicht-linearen numerischen Berechnung (sog. GMNIA-Berechnungen) zum Einsatz. Baupraktisch sind Versuche für größere Tragwerke jedoch nicht machbar (und finanzierbar) und die GMNIA-Berechnungen sind unter anderem aufgrund der erforderlichen hohen Rechenleistung und der lang andauernden Rechenzeit auch auf längere Sicht keine alltägliche baupraktische Vorgehensweise.

② **Tragfähigkeitsnachweis mit Abminderungsfaktoren χ:**

Besonders bei Einzelstäben wird der baupraktisch beliebte Nachweis mit Abminderungsfaktoren χ am häufigsten verwendet. Die Vorgehensweise besteht in der Ermittlung des elastischen kritischen Zustandes (hier die rot markierte Eulerlast N_{cr}), aus der sich die elastische Schlankheit berechnet. Daraus ergeben sich mithilfe der in DIN EN 1993–1–1 festgelegten querschnitts-, fertigungs- und materialabhängigen Knicklinien die Abminderungsfaktoren χ zur Berechnung der angenäherten Traglast $N_{B,Rk,②} = \chi \cdot N_{pl,Rk}$ (Querschnittsklassen 1 bis 3). Die Abminderungsfaktoren wurden an Hand verfügbarer Versuchsergebnisse und GMNIA-Berechnungen für Einzelstäbe so festgelegt, dass sich sichere rechnerische Traglasten (also $N_{B,Rk,②} \leq N_{B,Rk,①}$) ergeben. Mit Anwendung der „Allgemeinen Nachweismethode", die in Deutschland erst mit Einführung von DIN EN 1993–1–1, Abschnitt 6.3.4 bekannt wurde, können jetzt auch mittels der elastischen Systemschlankheit $\lambda_{cr,op}$ komplexere Tragsysteme (z. B. Rahmen) mithilfe der Abminderungsfaktoren nachgewiesen werden [4]. Dies ist im Vergleich zum Nachweis mit Ersatzimperfektionen baupraktisch äußerst praktikabel, weil keinerlei Imperfektionen aus der Tragwerksebene anzusetzen sind. Allerdings benötigt man wegen prinzipiell fehlender analytischer Lösungen zur Berechnung der Systemschlankeit $\lambda_{cr,op}$ unbedingt ein geeignetes DV-Programm.

Ein großer Nachteil dieser „Euler'schen" Vorgehensweise liegt an den Lösungseigenschaften des zugrunde liegenden homogenen Gleichungssystems: für $N < N_{cr}$ existiert keine Verformung (vertikale rote gestrichelte Linie ②a) und bei Erreichen der kritischen Eulerlast $N = N_{cr}$ ergeben sich Verformungen (horizontale rote Linie ②b) mit undefinierter (beliebiger) Größe, sodass mit dieser Lösung keine Schnittgrößen und Verformungen berechenbar sind und sich daher keine direkte Bemessung durchführen lässt.

③ Tragfähigkeitsnachweis mit Ersatzimperfektionen:

Mit geeigneten DV-Programmen werden die nicht-linearen elastischen Verformungen (③ in blau dargestellt) und Biegebeanspruchungen berechnet. Anschließend wird mit einem elastischen beziehungsweise plastischen Querschnittsnachweis am maximal beanspruchten Querschnitt die Traglast $N_{B,Rk,③}$ derart bestimmt, dass der Querschnitt zu 100 % ausgelastet ist. Problematisch ist allerdings der Ansatz notwendiger geometrischer Ersatzimperfektionen sowohl hinsichtlich des Verlaufes als auch der maximalen Amplitude. Mit Recht wird in [5] darauf hingewiesen, dass Form, Amplitude und die Art des Querschnittsnachweises miteinander korrelieren müssen, um sichere angenäherte Traglasten (also $N_{B,Rk,③} \leq N_{B,Rk,①}$) zu berechnen. Hierzu gibt DIN EN 1993–1–1 leider keine zuverlässigen Angaben. Weiterhin variieren die Angaben für die Amplituden der Imperfektionen für den Biegetorsionsnachweis nach DIN EN 1993–1–1 und dem deutschen Anhang erheblich. Und die affine Vorverformung nach DIN EN 1993–1–1, Abschnitt 5.3.2(11) ist lediglich für Biegeknicknachweise (nicht geeignet für Biegedrillknicken mit dominanten Biegemomenten!) einfacher Stäbe anwendbar [6].

Nur im theoretischen Idealfall ergeben sich für alle drei Methoden identische Traglasten!

2 Die baupraktischen Dilemmata

Für ebene und räumliche Stahltragwerke mit freitragenden oder stabilisierten Trägern aus dünnwandigen offenen Profilen sind meistens die Biegedrillknicknachweise bemessungsrelevant. Die beide baupraktischen Nachweismethoden (② und ③) gegen Biegedrillknicken benötigen die (elastische) Biegetorsionstheorie 2. Ordnung ([7], Tabelle 3), was schon bei einfachen Stäben zu komplizierten und allgemein nicht lösbaren gekoppelten Differentialgleichungen führt. Universell verwendbare baupraktische Formeln zur Berechnung der Beanspruchungen oder des kritischen Momentenverlaufs existieren weder für die Nachweismethode mit Abminderungsfaktoren ② (Ersatzstabmethode) noch für die benötigten Beanspruchungen 2. Ordnung der Ersatzimperfektionsmethode ③. Wenn zusätzlich zum Momentenverlauf noch eine Normalkraftbeanspruchung vorliegt, existieren grundsätzlich keine analytischen Lösungen für den (gekoppelten) kritischen elastischen Zustand $\{N_{cr}, M_{y,cr}(x)\}$.

Zur einschränkungslosen Anwendung der Biegewölbkrafttorsion und der Biegedrillknicknachweise ist man daher auf numerische Methoden angewiesen, wobei sich die FEM auf der Basis der Energiemethode [8] als besonders geeignet erwiesen hat. Sie benötigt Ansatzfunktionen für die gewünschten Ergebnisse (meistens für die Verformungen), wobei dann durch deren Ableitungen die Beanspruchungen näherungsweise berechenbar sind. Die Publikationen [9] zeigen jedoch eindrucksvoll, dass die Biegetorsion 2. Ordnung bei den zehn dort geprüften (meistens kommerziellen) FEM-Programmen überhaupt nicht oder nur rudimentär implementiert ist. In dem darauf basierenden Buch [10] wurden daher diverse Implementierungslevels der Torsion definiert (unterschieden), um die Ursachen der Abweichungen zu erklären. Dies ist allerdings für die Berechnung von Stahlkonstruktionen mit dünnwandigen offenen Profilen belanglos, da nur die komplette Implementierung der vollständigen Torsion ([10], Tab. 2.4, Fall 5 (Th.II.O.-3WS)) in jedem Fall zu (im Rahmen der FEM-Näherung der Theorie 2. Ordnung) korrekten Berechnungsergebnissen führt. Leider aber ist dies bis heute bei den

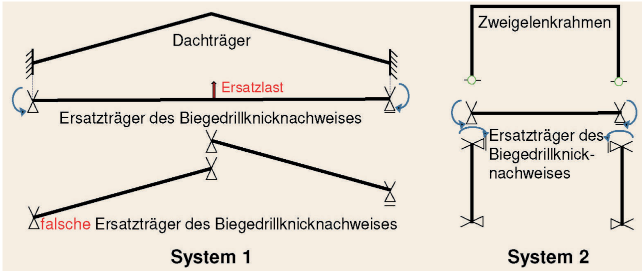


Bild 2. Beispiele für korrekte und unkorrekte Ersatzsysteme zum Biegedrillknicknachweis *Abb.: Rubert*

Fig. 2. Examples of correct and incorrect simplified models for lateral torsional stability check *Source: Rubert*

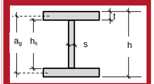
baupraktisch in Deutschland/Österreich/Schweiz am weitesten verbreiteten kommerziellen deutschsprachigen Programmsystemen für den Stahlbau (wie z. B. RSTAB [P3], SCIA [P4], FRILO [P5], etc.) nicht der Fall. Daher werden **ebene Systeme** mit räumlichen Einwirkungen und/oder Imperfektionen und räumliche Systeme **nur in Sonderfällen korrekt berechnet** und Biegedrillknicknachweise sind nur sehr eingeschränkt oder überhaupt nicht möglich. Der Stahlbauingenieur ist dann auf spezialisierte Zusatzprogramme der Biegetorsionstheorie 2. Ordnung und/oder der Biegedrillknicknachweise angewiesen, die (soweit dem Autor bekannt) lediglich für geradlinige ebene Ein- und Mehrfeldträger und zum Teil für einfache Rahmen anwendbar sind. Wegen der notwendigen Mehrfacheingaben der Tragsysteme bedeutet dies einen erheblichen Zusatzaufwand bei der Nachweistechnik und erzeugt unnötige Redundanzen. Da unterschiedliche Lagerungsbedingungen und meistens auch unterschiedliche baustatische Modelle der parallel eingesetzten Programme erforderlich sind, können sich dann häufig zueinander nicht kompatible Resultate einstellen. Beispielhaft sind in **Bild 2** zwei reale baustatische Systeme und die zwecks Biegedrillknicknachweisen vereinfachten (veränderten) Teilsysteme dargestellt:

System 1: Für den am First geknickten Dachträger gibt es selbst bei Vernachlässigung der Normalkräfte keine analytische Lösung für den kritischen Momentenverlauf $M_{y,cr}(x)$. Man behilft sich häufig durch einen geradlinigen Ersatzträger mit auf die Horizontale verlegte oder projizierte Länge des Dachträgers als Ersatzstützweite [18, Abschnitt 11.5.5]. Um annähernd die Momentenlinie des geknickten Dachträgers zu simulieren, ist zusätzlich noch eine Vertikalkraft in Feldmitte anzusetzen. Sehr fehlerhaft wäre es, den Dachträger in zwei getrennte und jeweils am Schnittpunkt im First mit Gabellagerung idealisierte Teilträger aufzuteilen, weil am ehemaligen Firstpunkt weder ein vertikales Lager noch eine starre Verdrehbehinderung vorhanden ist.

System 2: Es wird in diversen Fachbüchern und auch in DV-Handbüchern für (Zweigelenk-)rahmen vorgeschlagen, das reale Tragwerk zum Biegedrillknicknachweis an den Rahmenecken zu trennen und beide Stützen und den Riegel als Einzelstäbe nachzuweisen. In Ermangelung der Kenntnis der gegenseitigen Lagerung Stütze/Riegel werden dann in der Praxis an den Schnittstellen meist starre Gabellager (auch oder gerade weil dann analytische Formeln für M_{cr} zur Verfügung stehen) angenommen. Mittlerweile ist aber mithilfe moderner Nachweistechnik (DIN EN 1993–1–1, Abschnitt 6.3.4) nachgewiesen, dass diese Vorgehensweise deutlich auf der unsicheren Seite liegend inexakt sein kann [4].

Tabelle 1. Querschnittswerte des Schweißträgers H 400/180/10/14 im Vergleich
Table 1. cross section values of welded H 400/180/10/14 in comparison

Schweißprofil H 400 / 180 / 10 / 14				
Q-Werte		S3D [10]	ConSteel	RSTAB [10]
h	mm	400		
t	mm	14		
s	mm	10		
a_g	mm	386		
h_s	mm	372		
A_g	cm²	25,2		
A_s	cm²	37,2		
A	cm²	87,6		
A_{st}	cm²	38,6		
I_y	cm⁴	23 070	23 071,6	23 071,6
I_z	cm⁴	1364	1363,9	1363,9
i_y	cm	16,23	16,23	
i_z	cm	3,95	3,95	
I_T	cm⁴	45	45,96	44,18
$I_\omega/10^3$	cm⁶	506,9	505,9	



3 Eine zuverlässige, universelle und baupraktische Lösung

Schon 2013 wurde in [11] vehement die Entwicklung universell einsetzbarer baupraktischer Programmsysteme gefordert, die auch die Biegewölbkrafttorsion 2. Ordnung beherrschen, sodass an ein und demselben Tragwerksmodell sowohl die korrekten Beanspruchungen räumlicher stählerner Tragwerke mit dünnwandigen offenen Profilen berechenbar als auch räumliche Stabilitätsnachweise (Biegedrillknicken) von größeren Strukturen machbar sind. Auch in [10, Seite 44/letzter Absatz] meinen die Autoren keine Standard-Software zu kennen, die Berechnungen mit Stabelementen nach der Biegewölbkrafttorsion 2. Ordnung für beliebige räumliche Geometrien, exzentrische Lasteinleitungen und Lagerungsbedingungen beherrschen. Die Publikationen [9], [10], [11] haben deutlich gemacht, dass sich Anwender (insbesondere bei der Biegetorsion) nur auf DV-Programme verlassen sollten, die sich umfänglich qualifiziert haben. Dazu wurde kürzlich die VDI-Richtlinie 6201 [12] publiziert und in [10] werden einfache, aber anspruchsvolle (wenngleich nicht unbedingt baupraktisch relevante) Testbeispiele zur Verfügung gestellt. Allerdings sind nach den Erkenntnissen des Autors bei Biegetorsionsfällen noch zusätzliche Berechnungsaspekte hinsichtlich der Nutzung seitlicher Aussteifungselemente (Schubfelder, Verbände) und der numerischen Robustheit der mathematischen Lösungsalgorithmen (insbesondere für die Berechnung der Eigenformen) zu berücksichtigen.

Im Rahmen mehrerer Bachelorarbeiten wurde an der HAWK Hildesheim das DV-Programm [P1] an Hand aller zehn Checksysteme und weiterer komplexerer in [10] definierten Systeme evaluiert [13]. Alle berechneten Ergebnisse (Verformungen und

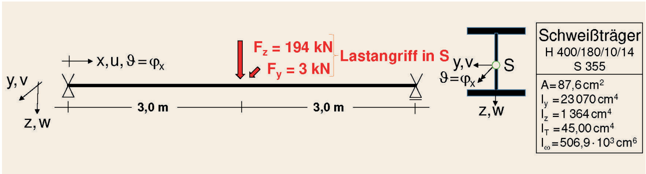


Bild 3. Beispiel 1: beidseitig starr gabelgelagerter Einfeldträger mit zwei Punktlasten in Feldmitte *Abb.: Rubert*
Fig. 3. Example 1: fork supported beam with two point loads at midspan *Source: Rubert*

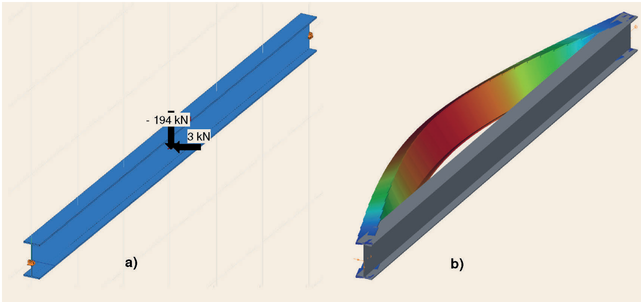


Bild 4. [P1]-Modelle zu Beispiel 1
a) Strukturmodell mit Einwirkungen; b) Biegetorsionsverformung
Abb.: Rubert
Fig. 4. [P1] models of example 1
a) structural model with loads; b) 3D displacement figure *Source.: Rubert*

Schnittgrößen) sind im Sinne der Theorie 2. Ordnung korrekt. Als Referenzlösung nach der Theorie 2. Ordnung werden in [10] die numerischen Lösungen des auf geradlinige Träger beschränkten DV-Programms [P2] verwendet. Interessant ist, dass sowohl [P2] als auch [P1] identische vollständig analytisch formulierten elastische und geometrische Steifigkeitsmatrizen eines Stabelementes mit hochwertigen Ansatzfunktionen und sieben Verformungsfreiheitsgraden (drei Wege, drei Verdrehungen und die Querschnittsverwölbung) an den Stabknoten verwenden ([8], Kap. 4), aber bei den Ergebnissen von Berechnungsbeispielen nicht zu vollkommen identischen Ergebnissen kommen. Die Berechnungen mit [P1] liegen im Vergleich zu [P2] bis auf wenige Ausnahmen etwas näher an den „exakten" Lösungen der Theorie 3. Ordnung [P6]. Dies liegt wohl in der Art der Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität. Während [P1] das Gleichgewicht bei den notwendigen Iterationen der Theorie 2. Ordnung an der jeweiligen verformten Systemgeometrie erstellt, benutzt [P2] (nach persönlichen Informationen von Prof. Kindmann) die unverformte Ausgangsgeometrie und damit auch eine unveränderte geometrische Steifigkeitsmatrix, wobei die geometrischen Nichtlinearitäten mittels fiktiver Ersatzlasten Berücksichtigung finden ([14], Abschnitt 3.3).

Aus Platzgründen werden hier nur die Ergebnisse zweier Checkbeispiele der kompletten Evaluation [13] und zwei weitere Beispiele zur Demonstration der numerischen Stabilität von [P1] sowie möglicher Auswirkungen unterschiedlicher Torsionstheorien auf Biegemomente gezeigt. Der komplette Evaluationsbericht kann unter der Mailadresse info@consteelsoftware.de angefordert werden.

Bei Biegetorsionsberechnungen können die Torsionskennwerte I_T und I_ω deutlichen Einfluss auf die Ergebnisgenauigkeiten haben. [P1] berechnet grundsätzlich alle elastischen und plastischen Querschnittswerte selbst. Daher werden die Querschnittskennwerte in **Tabelle 1** vergleichend angegeben.

Tabelle 2. berechnete Verformungen und Beanspruchungen von Beispiel 1 im Vergleich verschiedener Programme
Table 2. calculated displacements and internal forces for example 1 in comparison with different programs

	Lastfaktor	max v	max w	max ϑ	max ϑ` · 10^3	max Mxp	max Mxs	max Mx	min Mz	max Mω (B)
		cm	cm	mrad	mrad/cm	kNcm	kNcm	kNcm	kNm	kNm²
	Th.II.O.-1 =TH.I.O.	0,471 α	1,80 α	0	0	0			-4,50 α	0
S3D	0,1 α_{cr} = 10,7	0,0475	0,18	0,143	0,724	0,264			-0,454	0,00454
KSTAB		0,0475	0,18	0,144	0,727	0,265			-0,454	0,00452
ConSteel		0,0475	0,1802	0,14	0,73	0	0	0,4	-0,45	0,004
RSTAB Th.II.O.		0,05	0,19	0				0	-0,45	
RSTAB Th.III.O.		0,05	0,19	0,3				0	-0,46	
S3D	0,741 (= 1/1,35)	0,619	1,35	14,4	72,6	26,5			-6,45	0,461
KSTAB		0,651	1,33	15,3	76,8	28			-6,62	0,485
ConSteel		0,6405	1,3348	14,735	70,0	30	20	44,5	-6,5	0,467
RSTAB Th.II.O.		0,35	1,41	0				14	-3,33	
RSTAB Th.III.O.		2,1	1,59	98,6				149	-24,54	
S3D	0,8 α_{cr} = 1,33	0,767	1,45	19,4	97,5	35,5			-8,11	0,621
KSTAB		0,828	1,44	21,1	106	38,6			-8,5	0,671
ConSteel		0,8077	1,441	20,1775	100	40	20	60,9	-8,28	0,64
RSTAB Th.II.O.		0,38	1,52	0				16	-3,6	
RSTAB Th.III.O.		5,77	3,04	293,4				444	-70,76	
S3D	0,9 α_{cr} = 1,19	1,22	1,66	35,3	177	64,5			-12,3	1,13
KSTAB		1,42	1,62	41,3	207	75,5			-14,9	1,32
ConSteel		1,3344	1,6203	37,9225	190	70	40	114,5	-13,95	1,205
RSTAB Th.II.O.		0,43	1,71	0				20	-4,05	
RSTAB Th.III.O.		10,85	9,21	663,9				1 014	-155,36	
S3D	1 α_{cr} = 1,07	2,5	1,98	81	406	148	90	238	-28	2,61
KSTAB		3,9	1,8	128	643	234	141	375	-41,9	4,11
ConSteel		3,1708	1,7951	101,29	510	190	120	304,3	-33,87	3,224
RSTAB Th.II.O.		0,47	1,9	0				25	-4,5	
RSTAB Th.III.O.		12,42	15,45	892,2				1 380	-214,06	
S3D	1,05 α_{cr} = 1,02	4,25	2,44	144	720	262			-46,8	4,66
KSTAB		Abbruch mit der Meldung „ϑ > 0,3“								
ConSteel		8,1743	1,8542	275,3275	1 380	510	310	827,1	-88,25	8,756
RSTAB Th.II.O.		0,5	1,99	0				27	-4,72	
RSTAB Th.III.O.		12,8	18,2	970,5	1 250			1 510	-239,92	
S3D	1,1 α_{cr} = 0,97	7,25	3,65	252		456			-84,7	8,24
KSTAB		Abbruch mit der Meldung „Eigenwert überschritten“								
ConSteel		Abbruch mit der Meldung „System instabil“								
RSTAB Th.II.O.		0,52	2,09	0				30	-4,95	
RSTAB Th.III.O.		13,18	20,75	1 035,2				1 620	-263,65	
S3D	1,15	9,89	5,26	347	1 720	627			-119	11,4
KSTAB										
ConSteel										
RSTAB Th.II.O.		0,54	2,18	0				33	-5,18	
RSTAB Th.III.O.		13,36	23,14	1 089,8				1 715	-285,69	

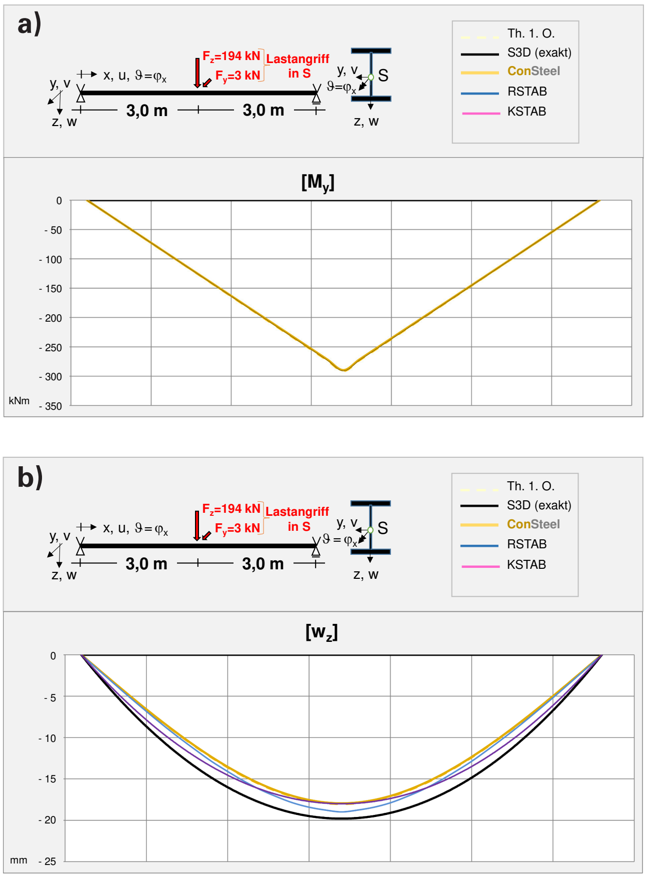


Bild 5. Berechnungsergebnisse verschiedener Programme im Vergleich für das Beispiel 1; a) Biegemoment M_y und b) zugeordnete vertikale Durchbiegung w *Abb.: Rubert*
Fig. 5. Comparison of calculation results of different software for example 1; a) bending moment M_y and b) vertical displacement w *Source: Rubert*

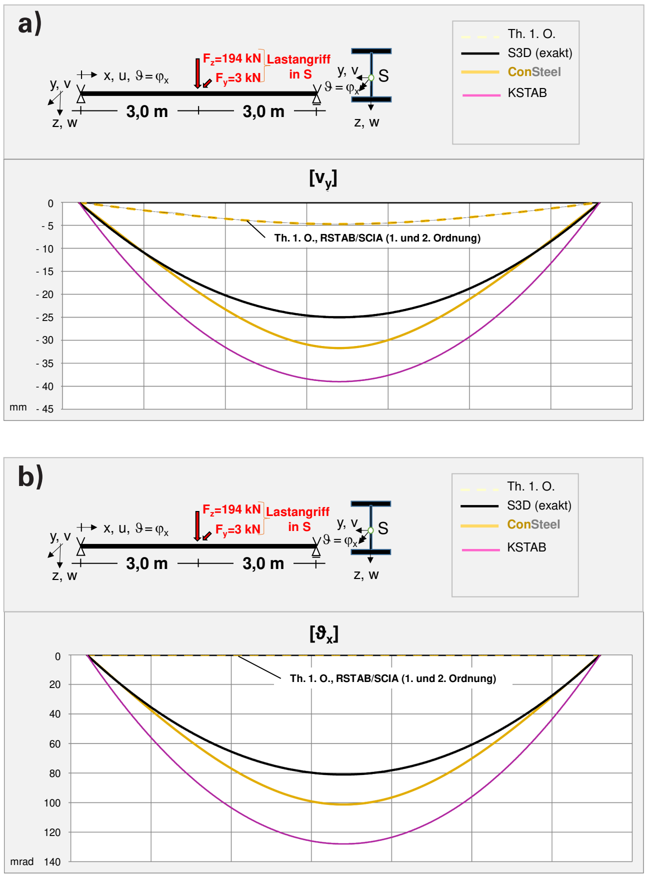


Bild 6. Berechnungsergebnisse verschiedener Programme im Vergleich für das Beispiel 1; a) seitliche Durchbiegung v; b) Querschnittsverdrehung ϑ *Abb.: Rubert*
Fig. 6. Comparison of calculation results of different software for example 1; a) lateral displacement v; b) torsion ϑ of cross section *Source: Rubert*

Bei allen vier Beispielen ist das Eigengewicht vernachlässigt.

Beispiel 1 (Beispiel 3 aus [10])**:**

Der in **Bild 3** dargestellte beidseitig starr gabelgelagerte Träger mit dünnwandigem offenem Schweißprofil trägt in Feldmitte die beiden im Schwerpunkt angreifenden Einzeleinwirkungen F_z = 194 kN und F_y = 3 kN. Man kann die Seitenlast F_y näherungsweise auch als Ersatzimperfektionslast anstelle einer Vorkrümmung in lokaler y-Richtung auffassen. Der Träger ist aufgrund der planmäßigen Doppelbiegung und seines offenen walzträgerähnlichen Querschnitts biegedrillknickgefährdet. **Bild 4** zeigt das mit [P1] erstellte Modell und die regulären Biegetorsionsverformungen, wobei die erste Eigenform dieser ähnlich sieht. Die Vergleiche der Berechnungsergebnisse für verschiedene Laststufen in **Tabelle 2** und in **Bild 5**, **Bild 6** und **Bild 7** für die angegebenen Lasten führen zu folgenden Aussagen:

- [P1] berechnet alle acht Beanspruchungen sowie die Verformungen nach der Biegewölbkrafttorsion 2. Ordnung korrekt
- die meisten Ergebnisse von [P1] liegen geringfügig näher an der exakten Lösung (S3D) als die der Referenzlösung [P2] aus [10]
- nur bei $M_y(x)$ und $w_z(x)$ ergeben sich nach Theorie 1., 2. und 3. Ordnung etwa identische Ergebnisse (Bilder 5a/b)
- nur die Berechnung nach der vollständigen Biegewölbkrafttorsion 2. Ordnung ([P1] und [P2]) erzeugt zusätzlich zu den Verformungen in beide Hauptachsenrichtungen (Bilder 5a/6a) eine Querschnittsverdrehung (Bild 6b) sowie die acht Schnittgrößen (Bilder 5a, 7a bis 7f)
- das betragsgrößte mit [P2] berechnete Moment M_z = |-41,9| kNm hat sich gegenüber der Theorie 1. Ordnung (-4,5 kNm) etwa verzehnfacht, jedoch bei [P1] nur um das 7,5-fache vergrößert, wobei der korrekte Werte nach Theorie 3. Ordnung etwa 6-fach anwächst (Bild 7a)
- $M_z(x)$ und die nur nach der Wölbkrafttorsion 2. Ordnung auftretenden Schnittgrößen B (alte Bezeichnung: M_ω), M_{xp}, M_{xs} sowie die Querschnittsverdrehung ϑ sind gegenüber der exakten Theorie 3. Ordnung circa 50 % bis 60 % zu groß, aber liegen damit (im Gegensatz zu Theorie 1. Ordnung) auf der sicheren Seite
- der mit [P1] berechnete kritische Lastfaktor α_{cr} liegt bei 1,07 und damit sehr nahe am elastischen Stabilitätsversagen (Tabelle 2, Spalte 2)

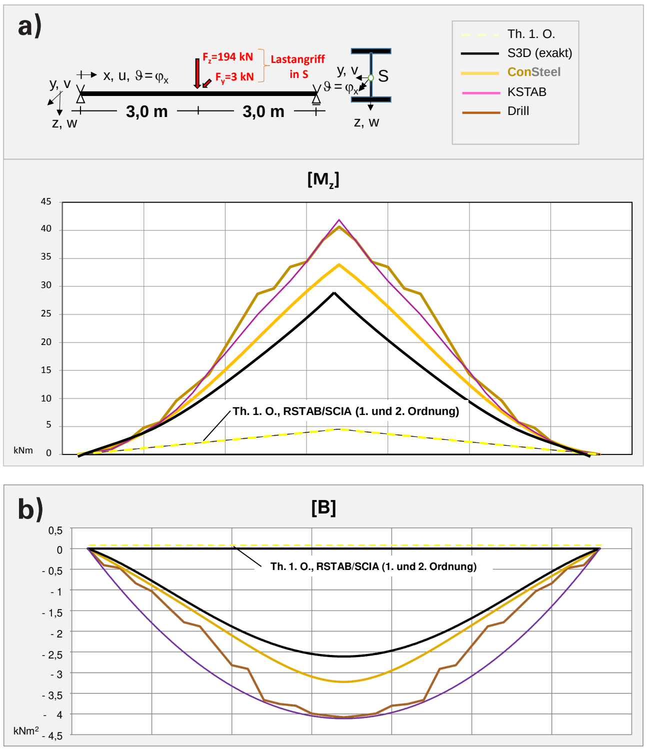
Eine weitere Kontrolle ist mittels äußerem globalen Gleichgewicht am verformten System mit den folgenden Torsionsmomenten möglich (**Bild 8**):

M_X: äußeres Torsionsmoment der Einwirkungen F_z und F_y

$$|M_x| = F_z \cdot v + F_y \cdot w \qquad (1)$$

M_T: Torsionsmoment pro Gabellager

$$|M_T| = M_x/2 \qquad (2)$$



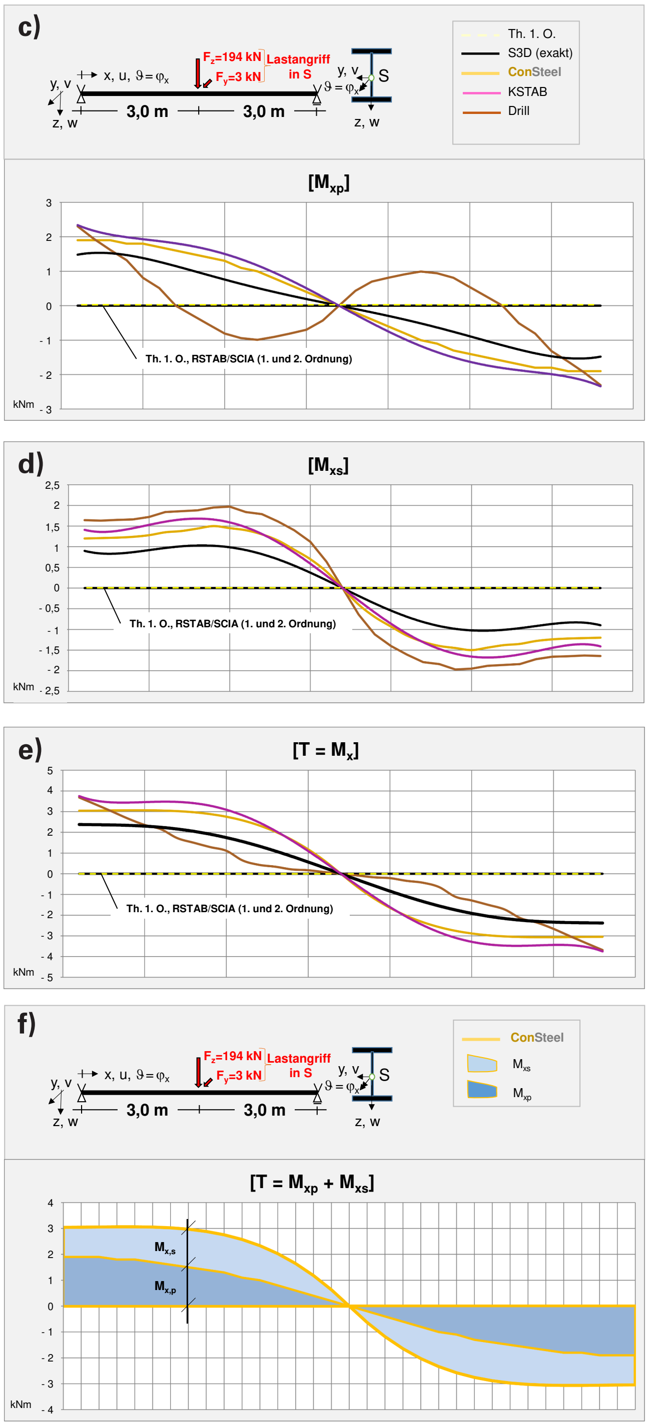


Bild 7. Berechnungsergebnisse verschiedener Programme im Vergleich für das Beispiel 1; a) Biegemoment M_z; b) Wölbbimoment B; c) primäres Torsionsmoment M_{xp}; d) sekundäres Torsionsmoment M_{xs}; e) gesamtes Torsionsmoment $T = M_x = M_{xp} + M_{xs}$; f) gesamtes Torsionsmoment in der grafischen Addition $M_{xp} + M_{xs}$ *Abb.: Rubert*

Fig. 7. Comparison of calculation results of different software for example 1; a) bending moment M_y; b) warping moment B; c) primary torsional moment M_{xp}; d) secondary torsional moment M_{xs}; e) total torsional moment $T = M_x = M_{xp} + M_{xs}$; f) torsional moment as graphical addition $M_{xp} + M_{xs}$, *Source: Rubert*

Der in **Tabelle 3** ausgewiesene Gleichgewichtsfehler von [P1] beträgt nur 1,7 %.

Die in Spalte 2 der Tabelle 2 genannten Werte für α_{cr} sind mit [P1] berechnet. Wegen α_{cr} = 1,07 befindet sich dieses einfache Beispiel recht nahe an der elastischen Stabilitätsgrenze und ist daher sehr gut zur Evaluation von Software und zur Überprüfung eigener Software geeignet. Baupraktisch allerdings ist der Einwirkungszustand nicht ertragbar. Der Ausnutzungsgrad liegt bei Anwendung der linearen plastischen Interaktion infolge M_y, M_z und B bei circa 200 %!

Beispiel 2 (Beispiel 7a und 7b aus [10]):
Der auf einer Seite wölbeingespannte Horizontalträger mit zentrischer beziehungsweise vertikal exzentrischer räumlicher Abspannung (**Bild 9**) wird am Kragarmende mit einer seitlichen Exzentrizität von 2 cm durch eine Vertikallast im Bereich F_z = 1 bis 16 kN (Beispiel 7a aus [10]) beziehungsweise F_z = 1 bis 35 kN (Beispiel 7b aus [10]) belastet. Zusätzlich sind linear verlaufende geometrische Ersatzimperfektionen der Größe e_y = L/200 vorhanden. Während im Fall 2a) die beiden räumlich angeordneten Abhängungen aus Rundrohren 60,3 x 5 im Schwerpunkt des Schweißträgers angebracht sind, befindet sich der Aufhängepunkt im Fall 2b) 28 cm oberhalb der Trägerschwerachse an einem starr angenommenen Anschlussblech. Da planmäßige Torsion vorliegt, ist nach DIN EN 1993-1-1 ein klassischer Stabilitätsnachweis unzulässig, sodass ein Nachweis nach Methode ③ (Bild 1) mit den Schnittgrößen der Theorie 2. Ordnung zu erfolgen hat.

Bild 10 (Fall 2a) und **Bild 11** (Fall 2b) zeigen die Modelle von [P1], die ersten Eigenformen sowie die Biegetorsionsverformungen. In **Bild 12** sind die charakteristischen Last-Verdrehkurven für das Kragarmende von [P1] im Vergleich zu den exakten Ergebnissen aus [10] dargestellt. Nach Kindmann/Kraus [8, S. 160] sollten Berechnungen an Torsionsbalken nur bis Erreichen von max. ϑ = 300 mrad (ca. 17°) baupraktisch verwendet werden, weil bei größeren Rotationen die Ergebnisse im Vergleich zu

Tabelle 3. Globales Gleichgewicht der Torsion nach Theorie 2. Ordnung
Table 3. Global equivalent of torsion acc. theory 2. order

Software	v [cm]	w [cm]	$F_z \cdot v$ [kNcm]	$F_y \cdot w$ [kNcm]	M_x [kNcm]	M_T [kNcm]		Fehler [%]	
						EDV*2)	Formel (2)	intern	zu S3D
ohne WKT*1)	0,47	1,80	91,18	5,40	96,58	0	-	-	-
S3D (exakt)	2,50	1,98	485,00	5,94	490,94	238,00	245,47	-3	0
KStab/FE-Stab	3,90	1,80	737,20	5,40	742,6	375,00	371,30	+1	+51
ConSteel	3,17	1,80	614,98	5,40	620,38	305,00	310,19	-1,7	+26

*1) **WKT**: Wölbkrafttorsion 1. und 2. Ordnung: z. B. **RSTAB, SCIA, F+L, etc.**
*2) **berechnet mit $M_T = M_{Tp} + M_{Ts}$**

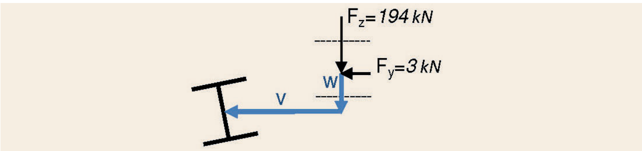


Bild 8. Globales Gleichgewicht der Torsion nach Theorie 2. Ordnung *Abb.: Rubert*
Fig. 8. Global equilibrium of torsion acc. theory 2. order *Source: Rubert*

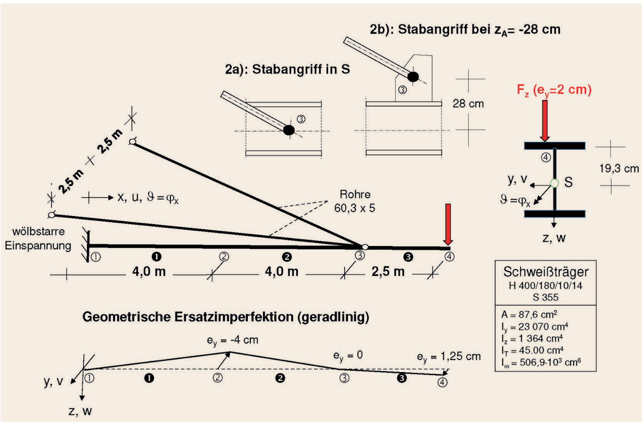


Bild 9. Beispiel 2: wölbeingespannter Torsionsträger mit räumlicher Abspannung *Abb.: Rubert*
Fig. 9. Example 2: cantilever beam supported by two spatial hangers *Source: Rubert*

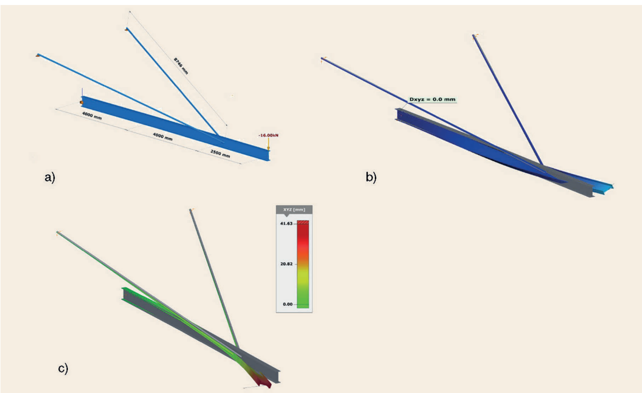


Bild 10. [P1]-Modelle zu Beispiel 2a
a) Strukturmodell mit Einwirkung; b) räumliche Eigenform; c) räumliche Verformung *Abb.: Rubert*
Fig. 10. [P1] model of example 2a
a) structural model with loads; b) spatial eigenshape; c) spatial displacement figure *Source: Rubert*

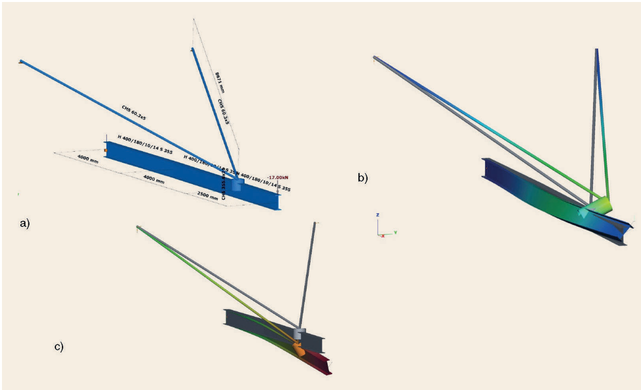


Bild 11. [P1]-Modelle zu Beispiel 2b
a) Strukturmodell mit Einwirkung; b) räumliche Eigenform; c) räumliche Verformung *Abb.: Rubert*
Fig. 11. [P1] model of example 2b
a) structural model with loads; b) spatial eigenshape; c) spatial displacement figure *Source: Rubert*

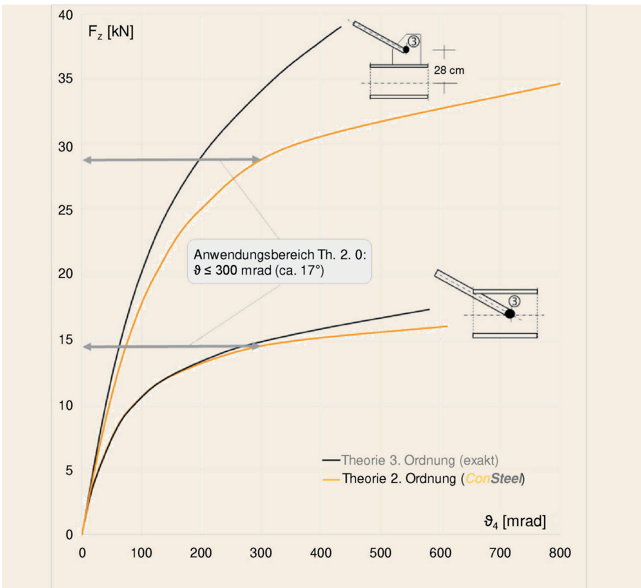


Bild 12. von [P1] berechnete Last-Verdrehkurven des Kragarmendes im Vergleich zu der exakten Lösung *Abb.: Rubert*
Fig. 12. Load-rotational displacement curves of cantilever end of [P1] in comparison with exact results *Source: Rubert*

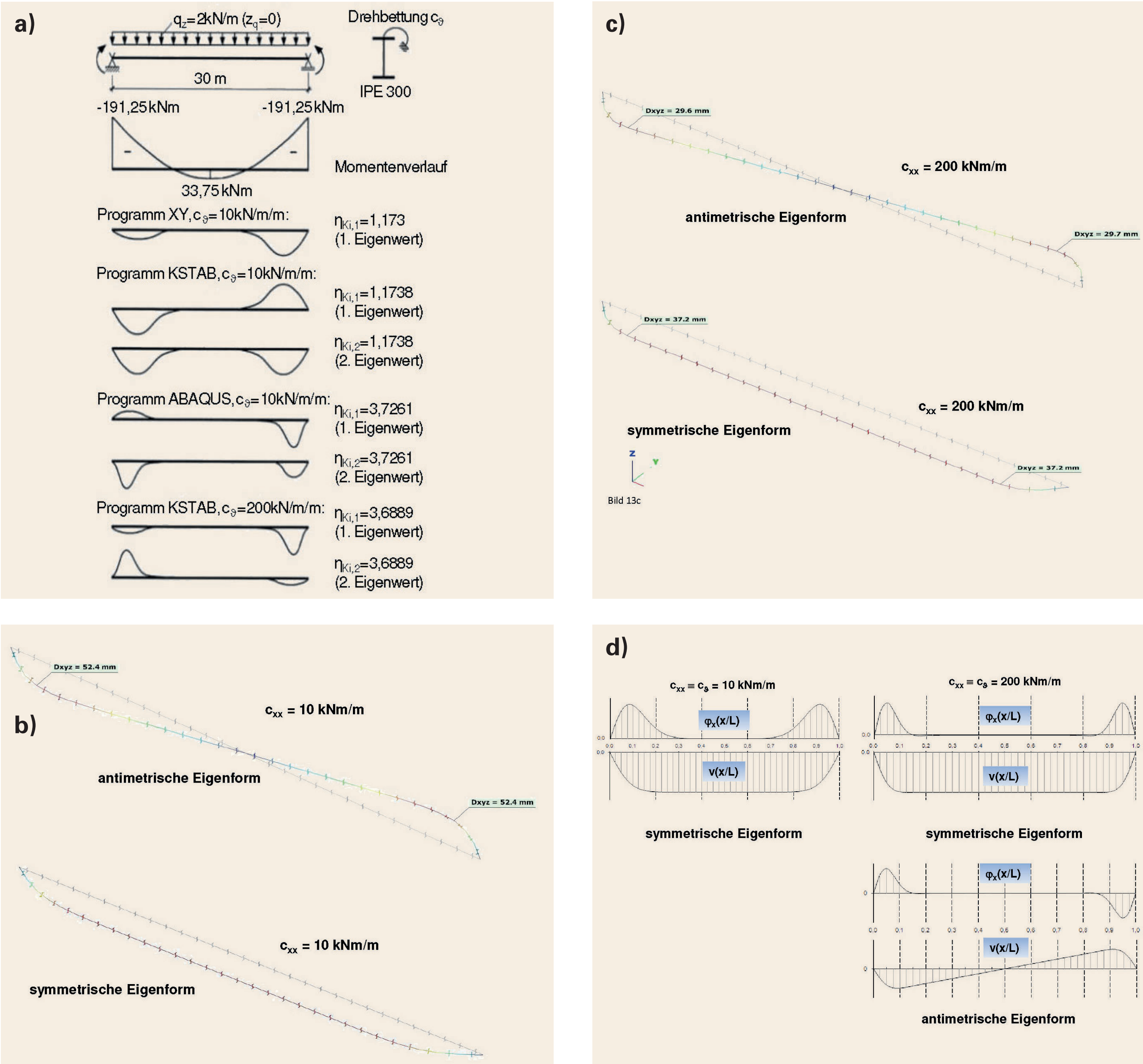


Bild 13. Eigenwerte und Eigenformen eines Balkens mit kontinuierlicher Rotationsfeder
a) Ergebnisse diverser Programme *Abb.: [8], [15]*; b) räumliche [P1]-Eigenform bei Rotationsbettung $c_{xx} = c_\vartheta$ = 10 kNm/m; *Abb.: Rubert* c) räumliche [P1]-Eigenform bei Rotationsbettung $c_{xx} = c_\vartheta$ = 200 kNm/m; *Abb.: Rubert* d) Komponenten v(x) und φ(x) der Eigenformen bei unterschiedlichen Rotationsbettungen *Abb.: Rubert*

Fig. 13. Eigenvalues and eigenshapes of a 30 m long beam with rotational line support;
a) calculation results of different software *Source: [8], [15]*; b) spatial eigenshape of [P1] with rotational line support $c_{xx} = c_\vartheta$ = 10 kNm/m; *Source: Rubert* c) spatial eigenshape of [P1] with rotational line support $c_{xx} = c_\vartheta$ = 200 kNm/m; *Source: Rubert* d) displacement components v(x) and φ(x) of the eigenshapes with different rotational line support *Source: Rubert*

Berechnungen mit der exakten Theorie zu ungenau und im Allgemeinem auch zu unwirtschaftlich werden.

Der Vergleich der Berechnungsergebnisse der **Tabelle 4** sowie des Bildes 12 ergibt folgende Aussagen:

- zur korrekten Berechnung der Beanspruchungen und Verformungen ist die Biegewölbkrafttorsion 2. Ordnung erforderlich
- [P1] berechnet alle in [10] für die Einspannstelle ① mitgeteilten Beanspruchungen sowie die Verformungen am Trägerende ④ im Rahmen der Theorie 2. Ordnung korrekt (Tabellen 4a/b)
- für $\alpha_{cr} \rightarrow 1$ zeigen beide Last-Verdrehungskurven nach Theorie 2. Ordnung ([P1]) die typischen asymptotischen horizontalen Annäherungen an den kritischen Zustand
- im Bereich zulässiger Torsionsdrehwinkel (nach Kindmann/Kraus [8, S. 160]: zul $\vartheta \leq 300$ mrad (ca. 17°); markiert in Bild 12) der Theorie 2. Ordnung ergeben sich auf der sicheren Seite liegende gute Übereinstimmung mit der exakten Theorie 3. Ordnung
- durch die Berücksichtigung der Abspann-Exzentrizität von e_z = -28 cm am Obergurt erhöht sich die Tragfähigkeit um etwa das Doppelte gegenüber zentrischer Abspannung, denn

Tabelle 4. von Consteel berechnete Verformungen und Beanspruchungen des Beispiels 2 im Vergleich zur exakten Lösung der Thorie 3. Ordnung
Table 4. by ConSteel calculated displacements and internal forces for example 2 in comparison with exact solution from theory 3. order

a) Anschluss der Abspannung im Trägerschwerpunkt

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	DV	F_z	α_{cr}	v_4	w_4	ϑ_4	ϑ'_4	M_{y1}	M_{z1}	B_1	$N_1 \approx N_2$
		[kN]	[-]	[cm]	[cm]	[mrad]	[mrad/cm]	[kNm]	[kNm]	[kNm²]	[kN]
1a *)	exakt	1	-	0,016	0,104	4,04	0,0048	0,454	-0,131	0,045	-4,38
	ConSteel			0,016	0,104	4,04	0,0100	0,450	-0,130	0,044	-4,38
1b	exakt	1	-	0,018	0,104	4,3	0,0050	0,465	-0,133	0,046	-4,39
	ConSteel		17,46	0,018	0,104	4,19	0,0100	0,460	-0,130	0,046	-4,38
2	exakt	4	-	0,097	0,417	20,4	0,0236	2,04	-0,562	0,209	-17,6
	ConSteel		4,37	0,098	0,417	20,1	0,0200	2,00	-0,560	0,208	-17,6
3	exakt	8	-	0,306	0,843	56,4	0,0632	4,92	-1,24	0.531	-35,6
	ConSteel		2,18	0,314	0,833	55,7	0,0600	4,74	-1,25	0,528	-35,5
4	exakt	10	-	0,505	1,07	87,9	0,0965	7,09	-1,67	0,788	-44,8
	ConSteel		1,75	0,521	1,04	87,1	0,0900	6,77	-1,68	0,787	-44,7
5	exakt	12	-	0,842	1,32	140	0,15	10,4	-2,2	1,19	-54,6
	ConSteel		1,46	0,885	1,24	141	0,15	9,88	-2,24	1,21	-54,4
6	exakt	14	-	1,48	1,69	237	0,25	16,5	-2,9	1,9	-65,4
	ConSteel		1,25	1,65	1,44	255	0,27	15,9	-3,0	2,1	-65,4
7	exakt	15	-	1,98	1,99	317	0,33	21,5	-3,3	2,5	-71,6
	ConSteel		1,16	2,43	1,54	375	0,39	22,1	-3,5	2,9	-72,4
8	exakt	16	-	2,64	2,45	422	0,44	28,3	-3,7	3,3	-78,5
	ConSteel		1,09	3,83	1,63	611	0,63	34,3	-3,5	4,6	-82,2

*) Ergebnisse nach Th. 1. Ordnung

die exzentrischen Zugkräfte der Hänger stabilisieren den Träger erheblich gegen zunehmende Verdrehungen (Bild 11)

– die Hänger verhalten sich wie verformungsabhängige nichtlineare und gekoppelte Federn für die Verformungen y, z und ϑ. Daher gelingt es nicht, Ersatzfedersteifigkeiten für die drei Verformungsfreiheitsgrade festzulegen. Infolgedessen kann das Tragverhalten nur an dem räumlichen Tragmodell korrekt berechnet werden

In ([10], Seite 44 unten) weisen die Autoren darauf hin, selbst kein (zumindest deutschsprachiges) Stabwerksprogramm zu kennen, das diesen Torsionsbalken berechnen kann, was nachweist, dass [P1] nicht zu den in [10] leider nur mit „P1“ bis „P10“ anonymisierten nicht korrekt rechnenden Programmen gehörte.

Beispiel 3:

Dieses Beispiel ist der Dissertation Laumann [20] sowie ([8], Abschnitt 9.2) entnommen. Ein 30 m langer beidseitig starr gabelgelagerter Biegeträger (IPE 300) mit Gleichstreckenlast und negativen Randmomenten wird durch kontinuierliche Drehbettung gegen Biegedrillknicken stabilisiert (**Bild 13**a). Obwohl alle benutzten und zum Teil sehr hochwertigen Programme die Eigenwerte α_{cr} (mit $M_{y,cr}(x) = \alpha_{cr} \cdot My(x)$; α_{cr} wurde nach DIN 18800 mit η_{ki} bezeichnet) mit hoher Stellengenauigkeit richtig berechnen, versagen sie alle bei großen Drehbettungen mit der Berechnung der zum jeweiligen Eigenwert gehörenden doppelten Eigenformen. [P1] dagegen berechnet sowohl die Eigenwerte als auch Eigenformen korrekt (Bilder 13b/c und 13d). Die klaren Abweichungen im Vergleich der Eigenformen zwischen [P2] und [P1] verblüffen, denn beide DV-Programme benutzen identische Steifigkeitsmatrizen. Während bei der großen Drehbettung von c_ϑ = 200 kNm/m [P2] und auch alle anderen seinerzeit untersuchten Programme versagen, weil unsymmetrische Eigenformen ermittelt werden, liefert [P1] die korrekten symmetrischen und antimetrischen Eigenformen bei gleichen Eigenwerten (Bilder 13b/c)! Geht man davon aus, dass die verwendeten Elementierungen und Lagerungen der verglichenen Programme vergleichbar sind, können die Ursachen für identische Eigenwerte bei abweichenden zugehörigen Eigenformen in unterschiedlicher Qualität der Finiten Elemente und der mathematischen Qualität der numerischen Lösungsalgorithmen liegen. Es handelt sich bei der Ermittlung kritischer elastischer Zustände um klassische Lösungen homogener Gleichungssysteme. Während diverse einfache und robuste Iterationsverfahren schnell zu korrekten Eigenwerten führen (z. B. Rayleigh-Quotient, Gaucho-Verfahren), werden die zugehörigen Eigenformen mit anderen und weitaus komple-

b) Anschluss der Abspannung 28 cm oberhalb des Trägerschwerpunktes

	DV	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		F_z	α_{cr}	v_4	w_4	ϑ_4	ϑ'_4	M_{y1}	M_{z1}	B_1	$N_1 \approx N_2$
		[kN]	[-]	[cm]	[cm]	[mrad]	[mrad/cm]	[kNm]	[kNm]	[kNm²]	[kN]
1a *)	exakt	1	-	-0,097	0,081	3,706	0,005	0,006	-0,228	0,0396	-4,2
	ConSteel		-	–0,104	0,079	4,083	0,010	0,03	-0,230	0,039	-4,2
1b	exakt	1	-	-0,095	0,081	3,707	0,004	0,01	-0,23	0,039	-4,2
	ConSteel		39,6	-0,101	0,079	4,014	0,010	0,03	-0,24	0,038	0
2	exakt	5	-	-0,432	0,406	18,9	0,025	0,05	-1,19	0,191	-21
	ConSteel		7,92	-0,469	0,396	21,1	0,030	0,14	-1,23	0,187	-21
3	exakt	10	-	-0,8	0,811	39,8	0,06	0,22	-2,51	0,381	-42,1
	ConSteel		3,96	-0,9	0,794	45,8	0,07	0,30	-2,63	0,376	-42,1
4	exakt	15	-	-1,15	1,22	65,2	0,10	0,67	-4,08	0,588	-63,3
	ConSteel		2,64	-1,33	1,19	77,3	0,10	0,61	-4,35	0,589	-63,3
5	exakt	20	-	-1,53	1,63	98,5	0,16	1,68	-6,03	0,831	-84,7
	ConSteel		1,98	-1,87	1,6	123,2	0,02	1,27	-6,65	0,860	-84,7
6	exakt	25	-	-1,98	2,06	145	0,25	3,78	-8,62	1,140	-107
	ConSteel		1,58	-2,69	2,02	199	0,02	2,37	-10,1	1,259	-106
7	exakt	30	-	-2,57	2,52	216	0,38	8,14	-12,3	1,570	-129
	ConSteel		1,32	-4,27	2,48	359	0,62	6,6	-16,4	2,008	-130
8	exakt	35	-	-3,33	3,08	321	0,57	17,1	-17,5	2,170	-154
	ConSteel		1,13	-9,68	3,15	834	1,49	23,4	-31,7	4,330	-163

*) Ergebnisse nach Th. 1. Ordnung

xeren Algorithmen (z. B. Inverse Vektoriteration mit Spektralverschiebung) berechnet. [P1] besitzt offensichtlich einen sehr hochwertigen (nicht extern dokumentierten) Berechnungsalgorithmus, der auch bei der Behandlung sehr kritischer (numerisch bereichsweise fast vollständig entkoppelter) Matrizen und bei den Eigenformen höherer Eigenwerte korrekt arbeitet.

Während bei Tragfähigkeitsnachweisen mit Abminderungsfaktoren („Ersatzstabnachweis“, Abschnitt 1/Methode ②) die Kenntnis der Eigenwerte genügt, sollten für komplexere Träger und Tragwerke bei Nachweisen mit Ersatzimperfektionen (Methode ③) optimalerweise die elastischen Eigenformen des Biegedrillknickens als sogenannte „Affine (oder äquivalente) Vorverformungen“ verwendet werden. Denn nach dem aktuellen Kenntnisstand reicht es für komplexere Träger und Tragwerke nicht aus, nur eine stabweise definierte lokale seitliche Verformungskomponente (Sinusbogen) und globale seitliche Stützenschiefstellung als Ersatzimperfektionen anzusetzen. Genauere Vorverformungen benutzen vollständige räumliche affine Vorverformungen, die sowohl die seitliche Verformung als auch die damit gekoppelten Verdrehungen und Verwölbungen des Querschnitts berücksichtigen [6], [19]. Auf die korrekte numerische Berechnung der kritischen Eigenformen muss daher Verlass sein, was insbesondere bei Berücksichtigung zusätzlicher Aussteifungen wie Schubfelder, kontinuierlicher oder singulärer Drehbettung oder Stabilisierungsfachwerken schwierig sein kann.

Beispiel 4:

An Hand eines kleinen Trägerkreuzes (räumliches Tragverhalten) aus zwei Walzprofilen wird gezeigt, wie infolge von zwei unterschiedlicher Lagerungsannahmen und unterschiedlicher in der Software implementierter Torsionstheorien bei gleicher Einwirkung sehr unterschiedliche Verläufe des Biegemomentes $M_y(x)$ berechnet werden. Bild 14 zeigt einen 5 m langen Hauptträger HEB 500, der an den Lagerpunkten ⓪ und ② im ersten Fall nur punktartig und im zweiten Fall gabelgelagert ist. In Feldmitte ② ist rechtwinklig dazu ein 7 m langer Nebenträger IPE 200 biegesteif angeschlossen. Er trägt in seiner Feldmitte ③ eine zentrische vertikale Einzellast F_z = 10 kN. Das System wird mit [P3] und [P1] nach Theorie 1. Ordnung berechnet, wobei hier nur die Biegemomente $M_y(x)$ (Bild 15) dargestellt werden. Wenn im idealisierten Tragmodell nur Punktlagerung des Hauptträgers modelliert wird, ist er nicht in der Lage, Torsionsmomente abzutragen. Dann wirkt die Einspannung des Nebenträgers als Momentengelenk und es ergeben sich sowohl mit [P3] als auch mit [P1] für Haupt- und Nebenträger Momentenlinien des Balkens auf zwei Punktstützen (Bilder 15a/b). Mit Gabellagerung am HEB ergeben sich dagegen nach den Bild 15c/d am Kreuzungspunkt erhebliche Abweichungen des berechneten Einspannmomentes (und damit des gesamten Momentenverlaufs $M_y(x)$ des Nebenträgers) beider Programme, da in [P3] nur die für offene Querschnitte ungünstige/unkorrekt anwendbare St. Ve-

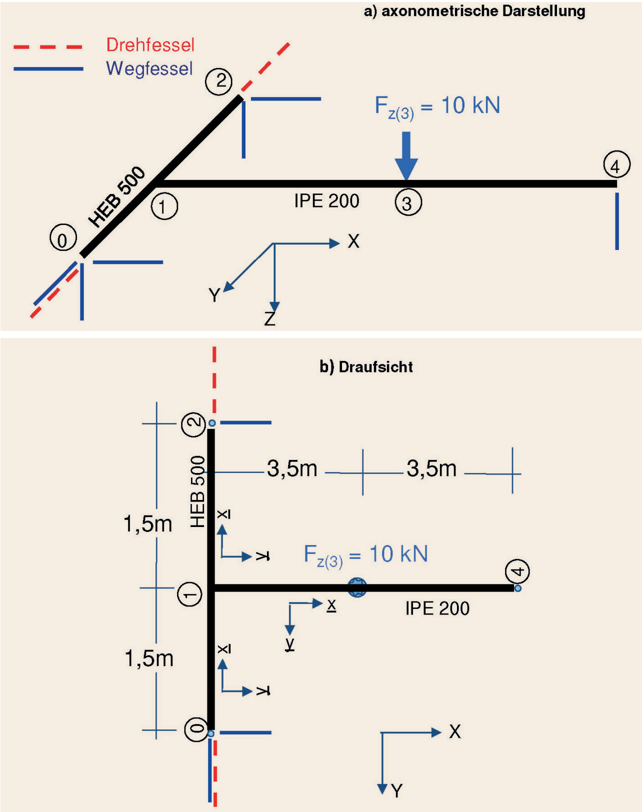


Bild 14. Trägerkreuz mit Einzellast; a) axonometrische Darstellung; b) Draufsicht *Abb.: Rubert*
Fig. 14. Little grid with point load; a) axonometric projection; b) top view *Source: Rubert*

nant'sche Torsionstheorie implementiert ist, dagegen [P1] mit der kompletten Torsionstheorie rechnet. Wenn beispielsweise der Hauptträger an seinen Enden Schottbleche oder Kopfplatten (z. B. zum vertikalen Lastabtrag) besitzt, ist für das komplette Tragmodell die Annahme von Gabellagern realistischer und wirtschaftlicher als Punktlager.

Zusätzlich zu der kompletten Evaluation [13] sei noch auf umfangreiche Beispielrechnungen mit Ergebnisvergleichen aus der Literatur [7], [15], [16], und [17] und dem Verification Manual [Webseite von P1] hingewiesen.

4 Resümee

Klassische Biegedrillknicknachweise noch mit speziellen auf Einzelfälle zugeschnittenem Formelapparat oder gesonderten speziellen DV-Lösung zu führen und damit meistens zu Vereinfachungen des eigentlichen Tragwerks gezwungen zu sein ist heutzutage nicht mehr notwendig und sollte nach Meinung des Autors nur noch zu Kontrollzwecken Verwendung finden.

Die evaluierte, universell und umfassend einsetzbare 2D/3D-Software [P1] berechnet die Verformungen und vollständigen acht Schnittgrößen nach der Biegewölbkrafttorsion 2. Ordnung auch bei räumlichen Tragmodellen korrekt. Durch Implementierung des 7DOF-Balkenelementes werden auch sehr große Tragstrukturen mit zum Beispiel weit über 100 Einwirkungskombinationen mit erstaunlich kurzen Rechenzeiten vollumfänglich berechnet. Darauf basierend können auch die elastischen und/oder plastischen Querschnittsnachweise (mit $\gamma_{M1} = 1{,}1$) als Stabilitätsnachweise geführt werden. Zusätzlich beherrscht diese Software die auf der Kenntnis der Eigenwerte und –formen basierenden klassischen Stabilitätsnachweise nach

a) b) c) d)

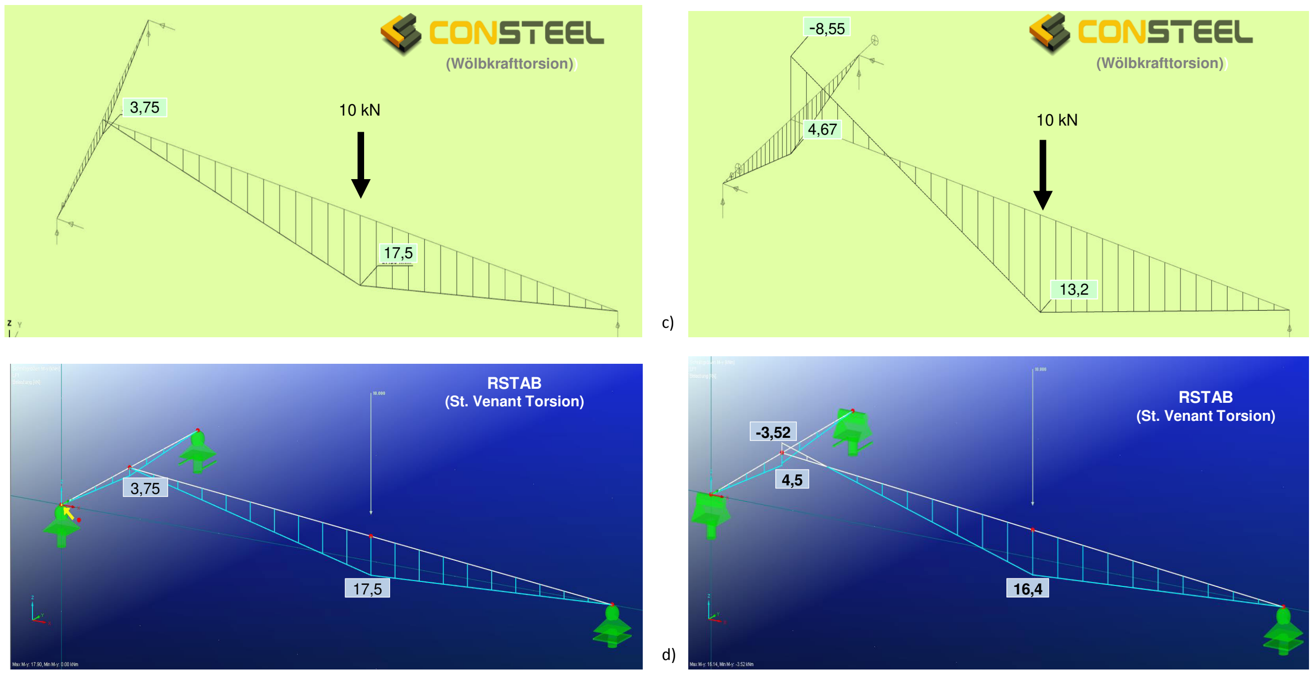


Bild 15. Momentenlinie $M_y(x)$ des Trägerkreuzes; a) berechnet von [P1] bei torsionsfreier Lagerung des Hauptträgers; b) berechnet von [P3] bei torsionsfreier Lagerung des Hauptträgers; a) berechnet von [P1] bei Gabellagerung des Hauptträgers; b) berechnet von [P3] bei Gabellagerung des Hauptträgers *Abb.: Rubert*
Fig. 15. Momentlines $M_y(x)$ of grid; a) calculated by [P1] with point supports of the main beam; b) calculated by [P3] with point supports of the main beam; c) calculated by [P1] with fork supports of the main beam; d) calculated by [P3] with fork supports of the main beam *Source: Rubert*

DIN EN 1993–1–1, Abschnitte 6.2 bis 6.3.3 (Einzelstäbe) und 6.3.4 (komplexe 2D/3D-Systeme).

Weil mit [P1] auch im Stabtragwerksmodell integrierte Anschlussberechnungen hinsichtlich Tragfähigkeit und Verformbarkeit möglich sind, werden Paralleleingaben (an verschiedenen Modellen) überflüssig und die Forderung des EC 3 zur Berücksichtigung der Wirkung der Anschlusssteifigkeiten auf die Beanspruchungen des Stabtragwerkes sind erfüllt. Das erspart dem Tragwerksplaner nicht nur erheblich Zeit bei der Projektbearbeitung, sondern führt auch zu umfassender Nachweissicherheit, denn [P1] führt sämtliche Nachweise parallel für alle Einwirkungskombinationen und filtert vollautomatisch für jeden Nachweis die maßgebende Kombination und den maßgebenden Nachweis heraus.

Literatur

[1] *Bornscheuer, F. W.:* Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorgangs unter besonderer Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion. *In:* Der Stahlbau 21 (1952), Heft 1, S. 1–9.

[2] *Bornscheuer, F. W.:* Beispiel und Formelsammlung zur Spannungsberechnung dünnwandiger Stäbe mit wölbbehindertem Querschnitt. *In:* Der Stahlbau 21 (1952), Heft 12, S. 225–232 und Der Stahlbau 22 (1953), Heft 2, S. 32–44.

[3] *Kindmann, R.:* Stahlbau/Teil 2: Stabilität und Theorie 2. Ordnung, 4. Auflage. Verlag Ernst & Sohn, Berlin 2008.

[4] *Rubert, A.; Pollmann, D.; Schäfer, S.:* Analyse und Nachweisverfahren des Biegedrillknickens stählerner Rahmen (Die Mär vom „sicheren“ Ersatzstabnachweis). *In:* Konstruktiver Ingenieurbau 04 (2017), S. 36–42 und zugehörige Backgrounddokumentation (zu beziehen über die E-Mail-Adresse der Autoren).

[5] *Wagenknecht, G.:* Stahlbaupraxis nach EC 3. Band 1 (5. Auflage), Abschnitt 10.3.2. Bauwerk/Beuth-Verlag 2014.

[6] *Hajdu, G.; Papp, F.; Rubert, A.:* Vollständige äquivalente Imperfektionsmethode für biege- und druckbeanspruchte Stahlträger. *In:* Stahlbau 86 (2017), Heft 6, S. 483–496.

[7] *Papp, F.; Rubert, A.; Szalai, J.:* DIN EN 1993–1–1 konforme integrierte Stabilitätsanalysen für 2D/3D Stahlkonstruktionen/Teil 1. *In:* Stahlbau 83 (2014), Heft 1, S. 1–15.

[8] *Kindmann, R.; Kraus, M.:* Finite-Element-Methoden im Stahlbau. Verlag Ernst & Sohn, Berlin 2007.

[9] *Gensichen, V.; Lumpe, G.:* Zur Leistungsfähigkeit, korrekten Anwendung und Kontrolle von EDV-Programmen für die Berechnung räumlicher Stabwerke im Stahlbau. *In:* Stahlbau 77 (2008), S. 447–453, 531–537, 608–613 und 908.

[10] *Lumpe, G.; Gensichen, V.:* Evaluation der linearen und nichtlinearen Stabstatik in Theorie und Software. Verlag Ernst & Sohn, Berlin 2014.

[11] *Gensichen, V.; Lumpe, G.:* Theorie II. und III. Ordnung– die großen Missverständnisse. *In:* Stahlbau 82 (2013), Heft 10, S. 762–774.

[12] VDI-Richtlinie 6201/Blatt 1: Softwaregestützte Tragwerksberechnung. Grundlagen, Anforderungen, Modellbildung, Referenzbeispiele (2015); Blatt 2: Softwaregestützte Tragwerksberechnung Verifikationsbeispiele (2017). VDI-Gesellschaft Bauen und Gebäudetechnik (GBG).

[13] *Rubert, A.:* Evaluationsbericht zur Prüfung der Korrektheit und Genauigkeit der Software ConSteel zur Berechnungen biegeknick- und biegedrillknickgefährdeter ebener und räumlicher stählerner Strukturen nach der Theorie 2. Ordnung. Höxter 2019. Downloadbar unter www.consteelsoftware.de/publikationen.

[14] *Friemann, F.; Stroetmann, S.:* Zum Nachweis ausgesteifter biegedrillknickgefährdeter Träger. *In:* Stahlbau 67 (1998), Heft 12, S. 762–774.

[15] *Papp, F., Rubert, A., Szalai, J.:* DIN EN 1993–1–1 konforme integrierte Stabilitätsanalysen für 2D/3D Stahlkonstruktionen/Teil 2. *In:* Stahlbau 83 (2014), Heft 2 S. 122–141.

[16] *Papp, F.; Rubert, A.; Szalai, J.:* DIN EN 1993–1–1 konforme integrierte Stabilitätsanalysen für 2D/3D Stahlkonstruktionen/Teil 3. *In:* Stahlbau 83 (2014), Heft 5, S. 325–342.

[17] *Papp, F.; Rubert, A.; Szalai, J.:* Räumliche Stabilitätsanalysen und Globale Stabilitätsnachweise nach DIN EN 1993–1–1. Bauingenieur 90 (2015), S. 469–477.

[18] *Kindmann, R.; Krüger U.:* Stahlbau/Teil Grundlagen, 5. Auflage, Verlag Ernst & Sohn, Berlin 2013.

[19] *Szalai, J.:* Direct Buckling Analysis based Stability Design Method of Steel structures. *In:* 9. International Conference on Advances in Steel Structures (IC ASS 2018), Hong Kong, 5–7 December 2018.

[20] [20] *Laumann, J. E.:* Zur Berechnung der Eigenwerte und Eigenformen für Stabilitätsprobleme des Stahlbaus. *In:* Technisch-wissenschaftliche Mitteilungen. Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr Universität Bochum, VDI Verlag, Düsseldorf, 2003.

DV-Programme

[P1] ConSteel: Strukturanalyse und -design Software. www.ConSteelsoftware.com

[P2] KSTAB/FE-STAB: www.ruhr-uni-bochum.de/stahlbau/software/

[P3] RSTAB: www.dlubal.de

[P4] SCIA: info@scia.de

[P5] FRILO: info@frilo.eu

[P6] S3D: Forschungsprogramm/FH Biberach (Prof. Lumpe)

Prof. Dr.-Ing. Achim Rubert

ehemals Professor für Baustatik und Stahlbau an der HAWK Hildesheim, Holzminden, Göttingen
Köterbergstr. 39B, 37671 Höxter
achim.rubert@hawk.de

Abb.: Privat