Ferenc Papp
Achim Rubert
Jozsef Szalai

DOI: 10.1002/stab.201410128

DIN EN 1993-1-1-konforme integrierte Stabilitätsanalysen für 2D/3D-Stahlkonstruktionen (Teil 1)

Dieser Aufsatz beschreibt – als erster einer Serie von drei Teilen – im Wesentlichen die Details der so genannten „Allgemeinen Methode" von DIN EN 1993-1-1/Abschnitt 6.3.4. Diese softwarebasierte Methode für beliebige 2D- und 3D-Stahlstrukturen benutzt ein integriertes Nachweiskonzept der Stabilitätsanalyse und -nachweise. Sie wird mit der klassischen Ersatzstabmethode für Stabilitätsnachweise einfacher Stabmodelle verglichen, bei der im Allgemeinen unterschiedliche Berechnungsmodelle (wie auch gegebenenfalls entsprechende Software) zur Schnittgrößenberechnung in der Ebene und den Stabilitätsnachweisen verwendet werden. Für die numerische Analyse – das ist ein entscheidender Kernpunkt der Methode – wird die auf der Basis von EC 3 entwickelte Software ConSteel eingesetzt, die ein leistungsfähiges 3D finites Balken-Stützenelement mit zwei Knoten und jeweils sieben Verformungsfreiheitsgraden verwendet, dessen Qualität mit relevanten Benchmark-Tests nachgewiesen wird. Nach der soeben erst publizierten Methodik der Klassifikation von Software zur Anwendung der Theorie 2. Ordnung ist ConSteel in die höchste Kategorie 5 (TH. II.O.-3WS) einzuordnen. Die „Allgemeine Methode" führt zu einer robusten und vor allem verständlichen computerunterstützten Nachweismethodik gegen globales Stabilitätsversagen.

DIN EN 1993-1-1 based integrated stability analysis of 2D/3D steel structures (Part 1). *This paper – as the first one of a series of three parts – presents the details and use of the "General method" of DIN EN 1993-1-1/clause 6.3.4. This method is a model based design procedure for steel structures using integrated stability analysis and standard check. The method is compared to the classical method where different calculation models as well as suitable software are used for the stress analysis and for the stability analysis and check. Also the alternative method of 3D calculations with the theory 2nd order using equivalent initial deformations, which are derived from the eigenform analysis, is presented.*
For the numerical analysis (as it is the crucial point of the method) the 14 DOF beam-column finite element of ConSteel is described and its quality is shown by relevant benchmarks. According to the recently published methodology for the classification of 2nd order theory software ConSteel belongs to the highest category 5 (TH.II.O.-3WS). Finally it is shown that the "General method" leads to an easy to use, robust and understandable computer aided design methodology against loss of global stability.

1 Bezeichnungsweisen

Die Einführung der Eurocodes in Deutschland brachte neben redaktionellen Änderungen (Benennungen, Formeln, Parameterbezeichnungen etc.) auch neue Parameter mit sich. Diese Veröffentlichung verwendet weitgehend die Notifikation von DIN EN 1993-1-1 [1a/b], die sich zu manchen Bezeichnungen älterer Normen und Literaturquellen unterscheidet. Tabelle 1 fasst wichtige Unterschiede wesentlicher Bezeichner zusammen. Es wird in dieser Veröffentlichung versucht, konsequent die Bezeichnungsweise von DIN EN 1993-1-1 zu benutzen, auch wenn hier und da ungewöhnliche Bezeichner auftreten (z. B. I_u anstatt I_y).

Es sei hier darauf hingewiesen, dass die in DIN EN 1993-1-1 definierte Bezeichnung (u, v) für die Querschnittsachsen unsymmetrischer Querschnitte ungeschickt und ohne die Konsequenzen bedenkend gewählt wurde, da ja seit langem die Längsverschiebungen des Querschnitts mit u und die seitlichen Verschiebungen (in y- bzw. jetzt auch u-Richtung) mit v belegt sind. Auch Formeln aus älteren Literaturquellen werden zwecks besserer Vergleichbarkeit auf eine weitgehend zu DIN EN 1993-1-1 konforme Bezeichnungsweise umgestellt.

2 Einleitung

2.1 Überblick

Dieser Teil des Aufsatzes beschreibt DIN EN 1993-1-1-kompatible und für komplexe 2D- und 3D-Strukturen des Stahlbaus geeignete integrierte Nachweisverfahren, die zum korrekten Nachwies die Wölbkrafttorsion zu berücksichtigen haben, wenn ihre Tragglieder aus dünnwandigen offenen Profilen bestehen. Sämtliche Computermodelle, Berechnungen der Eigenlösungen (Eigenwerte/Vergrößerungsfaktoren α_{cr} und Eigenformen/-funktionen $\eta_{cr}(x)$) und der Beanspruchungen (Schnittgrößen) nach der Biegetorsionstheorie des gering verformten Systems entstanden mit der integrativen 3D-Software ConSteel [P1] ohne Zuhilfenahme weiterer Programme.

Neben der Zusammenstellung wichtiger DIN EN 1993-1-1-basierten baupraktischen Nachweisverfahren gegen Stabilitätsverlust werden die integrierte Methode, ihr Mehrwert und ihre Anforderungen fokussiert sowie die Möglichkeiten, Bedingungen, Erfordernisse und das verwendete Finite Element mit markanten Benchmark-Beispielen vorgestellt. Insbesondere wird auf die für Deutschland neue „Allgemeine Nachweismethode" beliebiger kompletter Stabsysteme nach Abschnitt 6.3.4 eingegangen, die von DIN EN 1993-1-1 als einzige klassische Nachweismethode gegen räumliches Stabilitätsversagen allgemeiner/

Tabelle 1. Vergleich wichtiger älterer und DIN EN 1993-1-1-konformer Bezeichner
Table 1. Comparison of elder and DIN EN conform notation

Bezeichner/Bedeutung	Nomenklatur	
	DIN EN 1993	ältere
Beanspruchungen (Schnittgrößen)		
resultierendes Torsionsmoment ($T = T_t + T_w$)	T	M_x, M_T
St. *Venant*'sches oder primäres Torsionsmoment	T_t	M_{xp}, M_{T1}
Wölbtorsionsmoment oder sekundäres Torsionsmoment	T_w	M_{xs}, M_{T2}
(Wölb-)Bimoment	B	M_w, M_ω
kritische Beanspruchungen (Schnittgrößen und modale Eigenform)		
ideale Verzweigungslast des (Biege-)Knickens (Knicklast)	N_{cr}	N_{ki}, P_{ki}, F_{ki}
ideale Verzweigungslast des Drillknickens (Drillknicklast)	$N_{cr,T}$	P_D, $F_{D,ki}$
ideale Verzweigungslast des Biegedrillknickens (Biegedrillknicklast)	$N_{cr,TF}$	
ideale Momentenlinie des Biegedrillknickens (Biegedrillmomente)	$M_{cr}(x)$	$M_{ki,y}(x)$
Betragsmaximum der idealen Momentenlinie des Biegedrillknickens	M_{cr}	$M_{ki,y}$, M_{ki}
Eigenfunktion der Verschiebungen der niedrigsten Verzweigungslast	$\eta_{cr}(x)$	–
geometrische Ersatzimperfektion, affin zur Eigenfunktion η_{cr}	$\eta_{init}(x)$	–
Vergrößerungsbeiwerte/Steigerungsfaktoren		
Vergrößerungsfaktor der Einwirkungen zum Erreichen der idealen Verzweigungsbeanspruchung	α_{cr}	η_{ki}, ν_{ki}
Vergrößerungsfaktor der Einwirkungen zum Erreichen der idealen Verzweigungsbeanspruchung bei Ausweichen aus der Ebene	$\alpha_{cr,op}$	–
kleinster Vergrößerungsfaktor der Bemessungswerte der Einwirkungen zum Erreichen der charakteristischen Grenztragfähigkeit einer Konstruktion in der Tragwerksebene (ohne Knicken und Biegedrillknicken aus der Ebene)	$\alpha_{ult,k}$	–
Beiwerte des Knickens und Biegedrillknickens		
Schlankheitsgrad und Abminderungsbeiwert des Biegeknickens	$\bar{\lambda}$, χ	$\bar{\lambda}_k$, κ
Schlankheitsgrad und Abminderungsbeiwert des (Biege-)Drillknickens (N)	$\bar{\lambda}_T$, χ	$\bar{\lambda}_v$, $\bar{\lambda}_{vi}$, κ
Schlankheitsgrad und Abminderungsbeiwert des Biegedrillknickens (M)	$\bar{\lambda}_{LT}$, χ_{LT}	$\bar{\lambda}_M$, κ_M
Globaler Schlankheitsgrad und Abminderungsbeiwert zur Berücksichtigung des Stabilitätsverhaltens aus der Tragwerksebene	$\bar{\lambda}_{op}$, χ_{op}	–

beliebiger Stahlstrukturen angeboten wird. Der Aufsatz beschäftigt sich schwerpunktmäßig mit dieser Methode, um ihre Vorteile aufzuzeigen und sie in Deutschland bekannter und populär zu machen.

Die alternative Nachweismethode der räumlichen Theorie des gering verformten Systems mit Ansatz von Vorverformungen wird ebenfalls behandelt. Teil 2 des Aufsatzes wird die Anwendung auf komplexere 2D-Tragwerke (u. a. auch mit räumlichen Lagerungsbedingungen) in den Vordergrund stellen. 3D-Tragwerke werden im dritten Teil behandelt.

2.2 Methodenvergleich der Stabilitätsnachweise

Bei der statischen Berechnung und Bemessung von Stahlkonstruktionen hat die Analyse des Stabilitätsverhaltens besondere Bedeutung. Zur Erzielung wirtschaftlicher Konstruktionen der Haupttragelemente sind effiziente Berechnungs- und Nachweismethoden zur Verhinderung des Stabilitätsverlustes einzusetzen und diese dominieren auch in vielen Fällen (wie z. B. Hallenkonstruktionen) die Dimensionierung der Konstruktion. DIN EN 1993-1-1 bietet grundsätzlich immer zwei (physikalisch miteinander verwandte) Optionen an:

a) Methoden, die auf Berechnungen der Tragwerksbeanspruchungen am verformten System beruhen; man benötigt dazu geeignete geometrische Ersatzimperfektionen, die in den Abschnitten 5.2 und 5.3 von [1] beschrieben sind (→ Abschnitt 5)
b) Methoden, die auf der klassischen Stabilitätsanalyse nach *Euler* beruhen; sie benutzen Abminderungsfaktoren nach Abschnitt 6.3 von [1] zur Berechnung der Traglast (→ Abschnitt 6)

Im Fall a) verzichtet man bei baupraktisch relevanten Nachweisverfahren auf GMNI (geometrisch und materiell nichtlineare)-Analysen. Die Einwirkungen bzw. Einwirkungskombinationen werden stattdessen durch geeignete geometrische Imperfektionen (so genannte Ersatzimperfektionen) ergänzt, die pauschal vereinfacht alle strukturellen Imperfektionen (im wesentlichen Eigenspannungen und reale geometrische Imperfektionen) erfassen sollen. Leider sind im Eurocode sowohl Form als auch Amplitude der anzusetzenden Imperfektionen für manche wichtigen Konstruktions- und Nachweisbereiche nur teilweise, ungenügend oder gar nicht erfasst (z. B. Biegetorsionsprobleme elastisch ausgesteifter Träger). Im Anschluss an eine komplette Berechnung der Beanspruchungen aller Einwirkungskombinationen am verformten System sind nur noch die elastischen oder plastischen Tragfähigkeiten der Querschnitte nachzuweisen. Allerdings sei hier darauf hingewiesen, dass bei den plastischen Nachweisen gemäß [1], (Abschnitt 5.2.2(7)(a)) bis zu 9 % Abweichungen zur unsicheren Seite im Vergleich zu genauen Lösungen festgestellt wurden [3].

Man unterscheidet nach der Größe der Verformungen die Theorie kleiner Verformungen (auch Theorie 2. Ordnung genannt), die in den weitaus meisten Praxisfällen ausreicht und in ConSteel implementiert ist, und die Theorie großer Verformungen (manchmal auch Theorie 3. Ordnung genannt), die z. B. bei Durchschlagproblemen notwendig wird.

Fall b) ist die klassische/konventionelle Ingenieurmethode zur Lösung von Stabilitätsproblemen, bei der die Traglasten bzw. die diese beschreibenden Querschnittstragfähigkeiten stabilitätsbedingt durch schlankheits- und querschnittsformabhängige Abminderungsfaktoren χ bestimmt werden. In Ermangelung von Lösungen für komplexere Strukturen (z. B. bereits bei ebenen Rahmen) war diese Methode bisher meistens auf Einzelbauteile beschränkt, kann jetzt jedoch durch Anwendung der „Allgemeinen Methode“ nach Abschnitt 6.3.4 von [1] unter Nutzung geeigneter Software (z. B. [P1]) auf beliebige mit M⊕N-beanspruchte Konstruktionen erweitert werden.

Bei einer computerorientierten Betrachtung ist aufgrund der für die praktische Anwendung zur Verfügung stehenden wesentlich umfangreicheren Methoden/Software die folgende Unterscheidung sinnvoll, die in Tabelle 2 veranschaulicht und auch in [2] beschrieben wird:

- klassische Methode – getrennte Stabilitätsnachweise an Einzeltraggliedern
- integrierte Methode – globaler Stabilitätsnachweis an Gesamt- oder Teiltragwerken

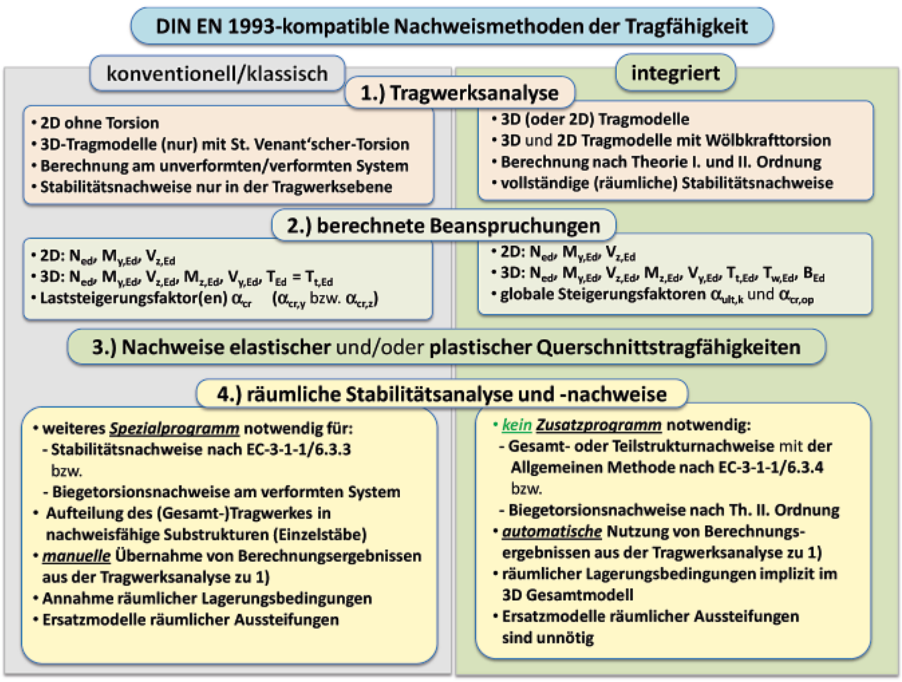
Im Hinblick auf den bei baustatischen Berechnungen bereits alltäglichen Einsatz der EDV ist es allerdings bei komplexeren 2D- und 3D-Modellierungen von Stahlkonstruktionen notwendig, die Fähigkeiten der in der Baupraxis benutzten Programme und damit die möglichen bzw. notwendigen Vorgehensweisen zu differenzieren. Tabelle 3 zeigt die prinzipiellen Unterschiede im Vergleich der Spalten „konventionell/klassisch“ und „integriert“.

Bei der klassischen Methode wird das globale Computermodell der Stahlstruktur bei dünnwandigen offenen Profilen (z. B. Walz- oder Schweißprofile) im Allgemeinen nur für die Berechnung der Beanspruchungen (Schnittgrößen) in Anspruch genommen, während die Stabilitätsanalyse mit separaten Modellen und meistens an aus dem Gesamtmodell extrahierten Einzelstäben zu erfolgen hat. Diese Modelle können bei einfachen Systemen analytische Lösungen sein oder sie verlangen ein spezielles Berechnungsmodell und damit zusätzliche auf Stabilitätslösungen spezialisierte DV-Programme, die bisher allerdings meistens nur auf 2D-Systeme oder geradlinige ebene Durchlaufträger beschränkt sind. Beispielsweise werden bei der SCIA Software [P2] das Spezialprogramm BT II und bei RSTAB [P3] das Programm FE-BGDK benutzt. Aber es ist sehr wichtig zu erkennen, dass dann diese Zusatzmodelle nahezu unabhängig vom „Haupt“-Modell sind, mit dem die Beanspruchungen ermittelt werden. Insbesondere die Übergabeschnittstellen vom Haupt- zum Stabilitätsprogramm bergen diverse Probleme, die trotz korrekter Überleitung der Belastungen und berechneter Beanspruchungen leicht zu groben Fehlern der Stabilitätsmodelle

Tabelle 2. DIN EN 1993-1-1-konforme Nachweismethoden der Stabilität
Table 2. Design methods for stability checks according to DIN EN 1993-1-1

Methodentyp		Vorgehensweise/Parameter	
		1	2
		Abminderungsfaktoren	Imperfektionen
A	klassisch/ konventionell	bei N: λ oder $\lambda_T \rightarrow \chi$ bei M_y: $\lambda_{LT} \rightarrow \chi_{LT}$	bei N: $e_{0,d}$, ϕ_0, η_{init} (x) bei M_y: k · $e_{0,d}$, η_{init} (x)
B	integriert	bei N <u>und</u> M_y	beliebige Beanspruchung
		$\alpha_{ult,k}$, $\alpha_{cr,op}$, $\lambda_{op} \rightarrow \chi$ und χ_{LT}	η_{init} (x)

Tabelle 3. Vergleich zwischen der konventionellen/klassischen und integrativen Nachweismethodik für Stahlkonstruktionen mit dünnwandigen offenen/geschlossenen Profilen
Table 3. Comparison of the conventional/classic and integrated design methods for steel structures with open/closed thin walled steel sections



und damit -berechnungen führen können. Beispielsweise werden keine (oder keine korrekten) räumlichen Lagerungsbedingungen übergeben und/oder die korrekte Wirkung elastischer räumlicher Stabilisierungen (z. B. von Dachverbänden) werden nicht oder nur grob nachgebildet. Auch die Lagerungsbedingungen der Schnittstellen, die bei der Aufteilung zu Einzeltragwerken für einfache Stabilitätsnachweise entstehen, lassen sich meistens nur abschätzen (auf der sicheren/unsicheren Seite; wie weit?). Somit entstehen für Stabilitätsnachweise diverse unabhängige Teilmodelle mit speziellen Lagerungsbedingungen, besonderen Knicklängen, äquivalenten Momentenbeiwerten etc. Obwohl diese Parameter wesentlichen Einfluss auf die Ergebnisse der Stabilitätsanalyse haben, sind sie möglicherweise nicht mit dem Tragverhalten des Haupt(struktur)-Modells konsistent, das die Beanspruchungen liefert.

Dagegen nutzt die integrierte Methode ein gemeinsames Modell (2D oder 3D) sowohl für die Berechnung der Beanspruchungen als auch für alle ebenen und räumlichen Stabilitätsanalysen. Die Vorteile des integrierten Modells (und DV-Programms) können folgendermaßen zusammengefasst werden:

– Alle Berechnungen und Nachweise sind konsistent in einem globalen Modell.
– Es besteht ein geringeres Risiko für falsche Lagerungsbedingungen bei räumlichen Versagensformen wie z. B. Biegedrillknicken (auch bei 2D-Tragwerken).
– Die natürlichen Interaktionen der verschiedenen zusammenwirkenden Tragwerkssubstrukturen (z. B. Stabilisierung eines Rahmenriegels durch einen Dachverband) machen die Berechnungen genauer.
– Das natürliche Modell macht auch komplexe Stabilitätsfälle erkennbar und durchsichtig und dient unmittelbar als Basis zur Berechnung von (System- oder Einzelstab-) Schlankheiten oder komplexen äquivalenten Vorverformungen.
– Unkonventionelle Strukturen können berechnet bzw. berücksichtigt werden:
  - ungewöhnliche Geometrie (oder Stabquerschnitte):
    Vouten, variabler Querschnittshöhe, Abtreppungen, gekrümmte Verläufe, unsymmetrische Querschnitte etc.
  - Lagerungsbedingungen:
    elastische (auch untereinander gekoppelte) Stützungen (in der Ebene und aus der Ebene), Linienlagerungen, exzentrische Anschlüsse, Trag- und Verformungsverhalten von Anschlüssen etc.
  - ungewöhnliche Laststellungen:
    exzentrische Lasteinleitungen, direkte Torsionseinwirkungen etc.
– Ein wesentlich größeres Spektrum an Tragwerksstrukturen kann realistischer analysiert werden.
– Mehr architektonische/konstruktive Kreativität kann im Tragmodell realisiert und sicher erfasst werden.

Es soll hier besonders betont werden, dass die korrekte Anwendung der beschriebenen integrierten Methode sehr spezielle Ansprüche an das baustatische Modell der Analyse und damit an die Leistungsfähigkeit des DV-Programms stellt, um alle möglichen räumlichen Versagensfälle der Stabstatik (Biegeknicken, Drillknicken, Biegedrillknicken, kombinierte Versagensformen, planmäßige Torsion etc.) zu beherrschen. Das ist keinesfalls trivial und die meisten kommerziellen und praxisorientierten Programmsysteme zur statischen Analyse von Stahlkonstruktionen haben begrenzte Fähigkeiten zur Behandlung räumlicher Stabilitätsfälle (s. o.), beherrschen eben nur das Biegeknicken. Der entscheidende Kernpunkt ist die korrekte Erfassung der Torsion und im Falle offener dünnwandiger Profile der Wölbkrafttorsion (→ Abschnitte 4 und 5). Demzufolge verlangt die integrierte Methode unbedingt den Einsatz der EDV, denn Handrechnungen sind kaum möglich. Der wesentliche Mehrwert und damit das Hauptanwendungsgebiet liegen in einer konsistenten (räumlichen) Stabilitätsanalyse kompletter und/oder komplexer Strukturen, die eine sichere und meistens auch wirtschaftlichere Konstruktion ermöglichen.

3 Das finite Stabelement

Das auf der vollständigen (nicht nur P-Δ-Effekte) Biegetorsionstheorie des geraden Balkens basierte finite Stabelement von ConSteel wird vorgestellt, das kleine Verformungen voraussetzt. Daher sollten die Tangentenwinkel an die Biegelinie 5° (ca. 0,1 rad) und der Torsionswinkel 15° (ca. 0,3 rad) nicht überschreiten. Das so genannte Balken-Stützenelement kann durch Längskräfte, räumliche Querlasten sowie Biege- und Torsionsmomente beliebig beansprucht werden. Nach der kürzlich publizierten Methodik der Klassifikation von Software zur Anwendung der Theorie 2. Ordnung [37, Tabelle 3] ist ConSteel in die höchste Kategorie 5 (TH. II.O.-3WS) einzuordnen, was z. T. die folgenden Beispiele und weitere hier nicht vorgestellte Vergleichsrechnungen aus [37] belegen.

Bild 1 zeigt das im Querschnitt beliebig geformte dünnwandige finite Element mit den zwei Knoten j und k im lokalen x-u-v-Koordinatensystem (bei unsymmetrischem Querschnitt) bzw. x-y-z-Koordinatensystem (bei Einfach- und Doppelsymmetrie). Es kann als Balkenelement (nur Biegemomente), als Stützenelement (Pendelstütze), als Torsionsbalken und im allgemeinen Fall als Balken-Stützenelement (belastet mit Längs- und Querkräften sowie Biege- und Torsionsmomenten) verwendet werden. Beliebige offene oder einfach geschlossene Querschnitte werden vorausgesetzt und deren Querschnittswerte im y(u)–z(v)-Hauptachsensystem berechnet. Dafür stellt ConSteel ein verallgemeinertes Plattensegment-Modell oder/und ein dickwandiges Querschnittsmodell zur Verfügung.

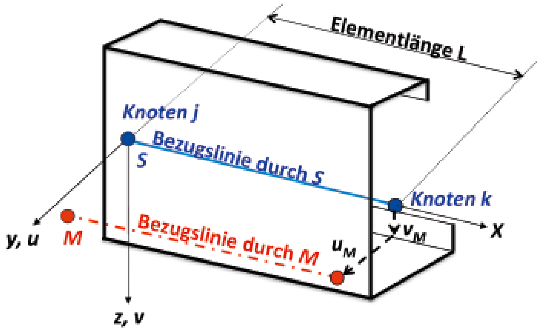


Bild 1. Finites Element mit lokalem Koordinatensystem
Fig. 1. Finite element and its local coordinate system

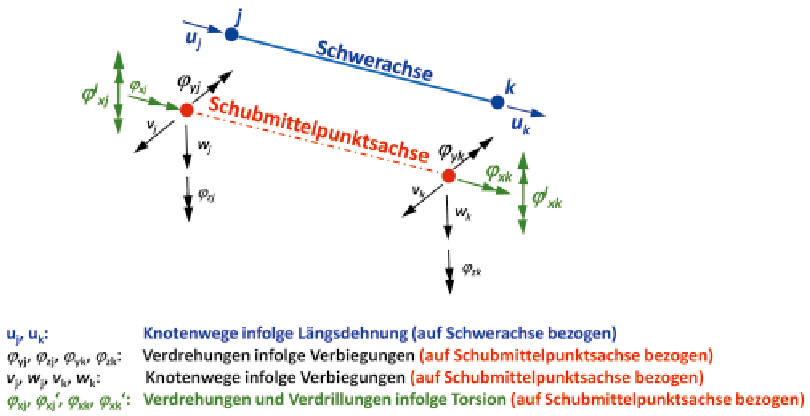


Bild 2. Definition der Verformungsfreiheitsgrade der Elementknoten
Fig. 2. Definition of the local displacements of the finite element nodes

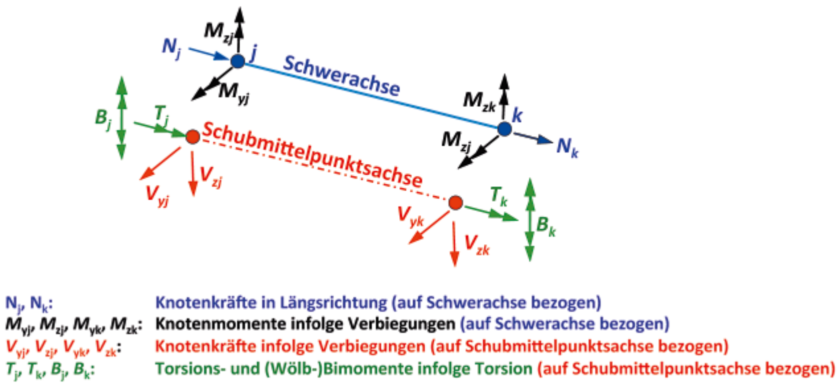


Bild 3. Interne Knotenkräfte des finiten Elementes
Fig. 3. Internal nodal forces of the finite element

Bild 2 zeigt die Verformungen der Elementknoten j und k. Die Verschiebungen u, v und w korrespondieren mit den lokalen Richtungen x, y(u) und z(v), während φ_x, φ_y und φ_z die Knotenverdrehungen um die lokalen Achsen bedeuten. φ_x' ist die erste Ableitung der Rotation (Verdrillung), die bei der Theorie der Wölbkrafttorsion benutzt wird. Zusammengefasst gilt:

- Das Stabelement hat 14 Verformungsfreiheitsgrade (sieben pro Knoten).
- Die Axialverschiebung u ist auf den Schwerpunkt S bezogen.
- Alle andere Verformungen sind auf den Schubmittelpunkt M bezogen, insbesondere die Rotation φ_x und ihre Ableitung φ_x'.

Bild 3 zeigt die Definition der lokalen Kräfte und Momente an den Knoten j und k. Sie korrespondieren mit den Richtungen der 14 Knotenverformungen. B ist das (Wölb-) Bimoment, das mit der Ableitung der Rotation φ_x' gekoppelt ist. Die Vorzeichendefinitionen der Kräfte und Momente resultieren aus der Formulierung des Knotengleichgewichtes. Zusammenfassend gilt:

- Die Normalkraft N und die Biegemomente M_y und M_z wirken im Schwerpunkt S.
- Die Schubkräfte V_y und V_z wirken im Schubmittelpunkt M (bei Vernachlässigung dieser Tatsache können bedeutende Fehler entstehen!).
- Die Torsionsbeanspruchungen T und B wirken im Schubmittelpunkt M.

Die internen Knotenkräfte und -momente des Elements sind mit den korrespondierenden Knotenverformungen gekoppelt. In Matrizenschreibweise ergibt sich:

$$\underline{s} = \left(\underline{K}_e + \underline{K}_g\right) \cdot \underline{v} \tag{1}$$

mit

$\underline{s}$ Spaltenmatrix der lokalen internen Knotenkräfte und -momente
$\underline{K}_e$ lokale elastische Steifigkeitsmatrix des Elementes
$\underline{K}_g$ lokale geometrische Steifigkeitsmatrix des Elementes
$\underline{v}$ Spaltenmatrix der lokalen Knotenverschiebungen

Der komplette Verformungszustand des Elementes wird durch die folgenden vier Deformationen beschrieben: Axialverschiebung, Verbiegungen um die y(u)- und z(v)-Achsen sowie die Verdrehung um die x-Achse. Als lokale Verformungsansätze werden Polynome über die Elementlänge wie folgt verwendet:

- lineares Polynom für die Längsverformung
- kubische Polynome für alle anderen Verformungen

Mit diesen Ansätzen können die beiden Steifigkeitsmatrizen $\underline{K}_e$ and $\underline{K}_g$ in expliziter Form beschrieben werden. $\underline{K}_e$ setzt sich aus den Material- und Querschnittseigenschaften sowie der Elementlänge zusammen, während $\underline{K}_g$ Einflüsse der aktuellen internen Schnittgrößen N, M_y, M_z, V_y und V_z sowie der Elementlänge enthält. Die Details der Formulierung der Steifigkeitskoeffizienten beider Matrizen entsprechen der Veröffentlichung von *Rajasekaran* [4]. Später wurden die Matrizen durch weitere Einflüsse ergänzt. Hier ist beispielsweise [5] zu nennen, wo z. B. die Einflüsse gleichmäßig verteilter externer Schubsteifigkeiten und gleichmäßig verteilter Streckenlasten auf die Steifigkeitsmatrizen berücksichtigt werden. Die theoretischen Formulierung des finiten Elementes aus [5] ist in KSTAB (nach DIN 18800) und FE-Stab (nach EC 3) [P4] implementiert. Demzufolge ergeben sich sehr gute Übereinstimmungen zu den Berechnungen mit ConSteel. Allerdings sind KSTAB und FE-Stab auf ebene und gerade Stabzüge beschränkt, während mit ConSteel beliebige ebene und räumliche Systeme modellierbar sind.

4 Die klassische Stabilitätslösung als Lösung des Eigenproblems

4.1 Lösungsprozedur

Eine Möglichkeit für Stabilitätsnachweise sind die klassischen Biege(drill)-Knicknachweise mit Abminderungsfaktoren (Tabelle 2, Methoden A1 und B1), wobei die „Allgemeine Methode“ (B1) in Deutschland erst mit [1] normativ eingeführt wurde, aber in der Praxis noch weitgehend unbekannt ist. Mittlerweile hat sie auch Eingang in deutsche Bücher ([34], [35]) gefunden. Zur Bestimmung der Abminderungsfaktoren benötigt man den ersten Lösungsteil der klassischen Eigenlösung, die so genannten Eigenwerte (in Form von Knicklasten N_{cr}, kritischen Momentenlinien $M_{cr}(x)$, die bei FEM-Lösungen als kritische Laststeigerungsfaktoren α_{cr} anfallen.

Mit der Annahme linearer Änderung der Schnittgrößen infolge des Einwirkungsmultiplikators α kann das globale Gleichgewicht am verformten finiten Gesamtmodell wie folgt geschrieben werden:

$$\left(\underline{K}_{e,glob} + \alpha \cdot \underline{K}_{g,glob}\right) \cdot \underline{v}_{glob} = \alpha \cdot \underline{p}_{glob} \tag{2}$$

mit $\underline{K}_{e,glob}$ als elastische Gesamtsteifigkeitsmatrix im globalen Koordinatensystem des Modells, $\underline{K}_{g,glob}$ als geometrische Gesamtsteifigkeitsmatrix, $\underline{v}_{glob}$ als Spaltenmatrix der Systemknotenverformungen und $\underline{p}_{glob}$ als Spaltenmatrix der korrespondierenden Knotenlasten und -momente. Wenn die Arbeiten der externen Einwirkungen an der Versagensverformung vernachlässigt werden, ergibt sich die zweite Variation der Deformationsenergie im kritischen Versagenszustand der Struktur zu null:

$$\frac{1}{2} \cdot \underline{v}_{glob}^{T} \cdot \left(\underline{K}_{e,glob} + \alpha \cdot \underline{K}_{g,glob}\right) \cdot \underline{v}_{glob} = 0 \tag{3}$$

In Gleichung (3) kennzeichnet der Hochzeiger ‚T' die transponierte Spaltenmatrix. Sie führt zum so genannten allgemeinen Eigenwertproblem:

$$\left(\underline{K}_{e,glob} + \alpha_{cr} \cdot \underline{K}_{g,glob}\right) \cdot \underline{v}_{glob} = 0 \tag{4}$$

Gleichung (4) führt zu so genannten Eigenlösungen, die aus zugeordneten Paaren von Eigenwerten $\alpha_{cr,i}$ und Eigenverformungen (Eigenformen) $\underline{v}_{glob,i}$ bestehen. Der kleinste positive Wert aller Eigenwerte $\alpha_{cr,i}$ aus (4) wird als Lastverzweigungsfaktor (oder kritischer Lastfaktor) bezeichnet, der in EC 3 als „Vergrößerungsfaktor zum Erreichen der idealen Verzweigungsbeanspruchung" bezeichnet wird (Tabelle 1):

$$\alpha_{cr} = \min \alpha_{cr,i}^{+} \tag{5}$$

Die Spaltenmatrix der kritischen Knotenlasten der finiten Elementstruktur kann einfach mit dem kritischen Lastfaktor errechnet werden:

$$\underline{s}_{cr} = \alpha_{cr} \cdot \underline{s} \tag{6}$$

Gleichung (6) beinhaltet die folgenden Sonderfälle:

– Biegeknicken, Drillknicken, Biegedrillknicken infolge N:

$$N_{cr} = \alpha_{cr} \cdot N_{Ed} \tag{7}$$

– Biegedrillknicken infolge Querlasten (LTB):

$$M_{cr,y}(x) = \alpha_{cr} \cdot M_y(x)_{Ed} \tag{8}$$

– Biegedrillknicken infolge Längs- und Querlasten:

$$\left(N, M_y(x)\right)_{cr} = \alpha_{cr} \cdot \left(N, M_y(x)\right)_{Ed} \tag{9}$$

Die zu $\alpha_{cr,i}$ gehörende Eigenform, die sich im Allgemeinen als eine räumliche Verformungsfunktion mit den Komponenten $v(x)_{glob}$, $w(x)_{glob}$ und $\varphi_{x,glob}$ darstellt (wobei $u(x)_{glob}$ vernachlässigbar ist), beschreibt die globale elastische Versagensfigur des Strukturmodells. Sie kann über die Ansatzpolynome aus der Spaltenmatrix $\underline{v}_{glob,i}$ berechnet werden, lässt sich aber nur qualitativ angeben (auch das Vorzeichen ist willkürlich), da die Gesamtsteifigkeitsmatrix ($\underline{K}_{e,glob}$ + $\underline{K}_{g,glob}$) mindestens einen Rangabfall hat. Daher muss mindestens eine Komponente der Lösung $\underline{v}_{glob,i}$ frei gewählt werden und die anderen Komponenten sind davon linear abhängig. Im EC 3 wird diejenige Eigenfunktion/Eigenform mit $\eta(x)_{cr}$ bezeichnet (Tabelle 1), die zu min $\alpha_{cr,i} = \alpha_{cr}$ gehört. Ihre Berechnung ist notwendig, wenn man die Beanspruchungen unter Berücksichtigung der räumlichen Verformungen berechnen und dazu die affine Vorverformung (EC 3: äquivalente Imperfektion) $\eta(x)_{init}$ (Tabelle 2) verwenden will, die sich durch Skalierung aus $\eta(x)_{cr}$ ergibt.

4.2 Berechnung kritischer Beanspruchungen und ihrer Versagensformen

Im Folgenden werden die numerischen Ergebnisse durchgeführter Eigenanalysen ausgewählter Systeme mitgeteilt. Alle Ergebnisse basieren auf der finite Elementmethode und benutzen das in Abschnitt 3.1 beschriebene finite Stabelement mit 14 Freiheitsgraden. So weit bekannt, werden sie mit theoretischen Lösungen und ansonsten mit anderen FEM-Lösungen verglichen. Die Beispiele sowie ConSteel stehen im Internet [P1] kostenfrei zum Test abrufbereit.

4.2.1 Biegetorsionsstab unter Druckkraft (Beispiel 1)

Die kritische Normalkraft $N_{cr,TF}$ und die zugehörige Versagensform einer zentrisch gedrückten Stütze (Bild 4a) mit beidseitiger Punktstützung (Gabellagerung) und unsymmetrischem Querschnitt (Kaltformprofil nach Bild 4b) werden berechnet.

Die theoretische Lösung der Biegedrillknicklast (englisch: flexural-torsional buckling load) für beliebige unsymmetrische Querschnitte ist als kubische Bestimmungsgleichung $f(N) = 0$ aus der Literatur bekannt (z. B. [6], [7]). In der Bezeichnungsweise der Hauptachsen (u, v) nach EC 3 lautet sie:

$$\begin{aligned} f(N) = {} & N^3 \cdot \left(i_M^2 - u_M^2 - v_M^2\right) - \\ & - N^2 \cdot \left\{ i_M^2 \cdot \left(N_{cr,T} + N_{cr,u} + \right.\right. \\ & \left. + N_{cr,v}\right) - N_{cr,v} \cdot u_M^2 - \\ & \left. - N \cdot N_{cr,u} \cdot v_M^2 \right\} + N \cdot i_M^2 \times \\ & \times \left(N_{cr,u} \cdot N_{cr,v} + N_{cr,v} \cdot N_{cr,T} + \right. \\ & \left. + N_{cr,T} \cdot N_{cr,u}\right) - i_M^2 \cdot N_{cr,T} \times \\ & \times N_{cr,u} \cdot N_{cr,v} = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

$$N_{cr,T} = \frac{1}{i_M^2} \cdot \left(\frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_w}{L^2} + G \cdot I_t \right); \quad N_{cr,u} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_u}{L^2}; \quad N_{cr,v} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_v}{L^2} \tag{11}$$

$$i_M = \sqrt{i_u^2 + i_v^2 + u_M^2 + v_M^2} \tag{12}$$

In den Gleichungen (10) bis (12) sind u_M (wegen unsymmetrischem Querschnitt (anstelle von y_M) und v_M (anstelle von z_M) die Koordinaten des

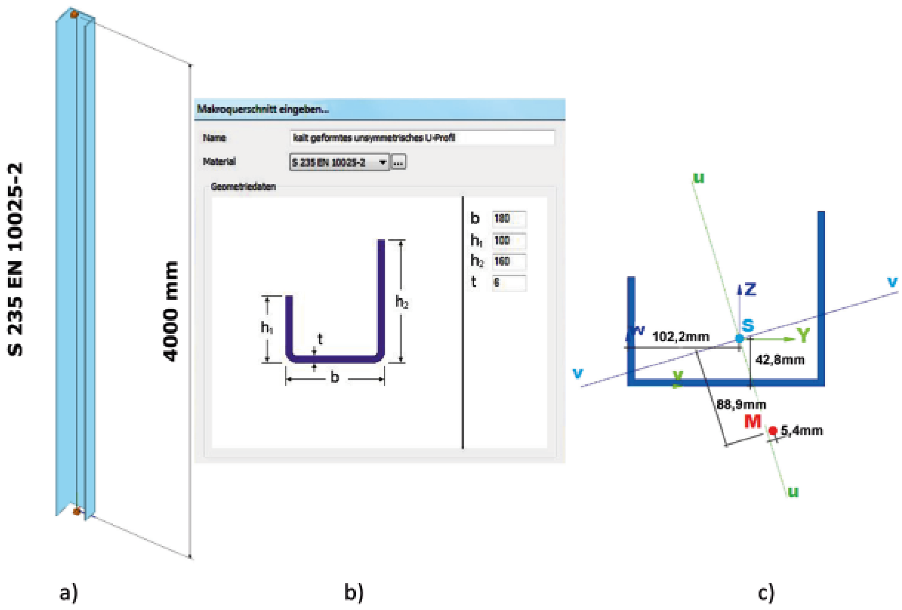


Bild 4. a) Zentrisch gedrückte Stütze mit beidseitiger Gabellagerung;b) 180 × 100 × 160 × 6 unsymmetrischer Rinnenquerschnitt in mm; c) Ergebnisse der Querschnittsberechnung von ConSteel
Fig. 4. a) Centrically compressed column with fork end conditions; b) 180 × 100 × 160 × 6 non-symmetric channel cross-section dimensions in mm; c) results of the cross section analysis of ConSteel

Schubmittelpunktes im Hauptachsensystem des Querschnitts (Bild 4c). Entsprechend werden die Bezeichnungen I_u und i_u (anstelle von I_y und i_y) sowie I_v und i_v (anstelle von I_z und i_z) verwendet. Gleichung (10) besitzt die drei realen Wurzeln (Nullstellen) $N_{cr,TF,1}$, $N_{cr,TF,2}$ und $N_{cr,TF,3}$, wobei das Minimum die gesuchte kritische Normalkraft $N_{cr,TF}$ ist. Es ist immer kleiner oder gleich der anderen in der Formel verwendeten Versagenslasten $N_{cr,T}$, $N_{cr,u}$ und $N_{cr,v}$.

Analytische Berechnung:
Knick-/Stablänge:
$L_{cr} = 400$ cm
Materialwerte:
$E = 21000$ kN/cm^2,
$G = 8077$ kN/cm^2
Querschnittswerte:
$I_u = 1462$ cm^4, $I_v = 468{,}8$ cm^4,
$I_t = 3{,}2178$ cm^4, $I_w = 19121$ cm^6,
$i_u = 7{,}55$ cm, $i_v = 4{,}27$ cm,
$u_M = 8{,}89$ cm, $v_M = 0{,}54$ cm

$$i_M = \sqrt{i_u^2 + i_v^2 + u_M^2 + v_M^2} = 12{,}43 \text{ cm}$$

Einzel-Versagenslasten:
Drillknicken:
$N_{cr,T} = 328$ kN
Biegeknicken:
$N_{cr,u} = 1884$ kN und
$N_{cr,v} = 607{,}3$ kN

Die maßgebende Versagenslast ergibt sich durch Nullstellensuche des Polynoms (10) zu $N_{cr,TF} = 299{,}16$ kN (Bild 5).

Finite Element-Berechnung:
Die Ergebnisse von ConSteel zeigen Tabelle 4 und Bild 6. Bereits bei n = 2 finiten Elementen entspricht das numerische Ergebnis äußerst gut dem theoretischen Wert.

Aus der Bewegung des Querschnitts des Druckstabes in Feldmitte (Bild 6b) kann man leicht erkennen, dass sich der Versagenszustand η_{cr} aus den drei Versagenskomponenten $\eta_{cr,u}$, $\eta_{cr,v}$ und $\eta_{cr,\varphi x}$ zusammensetzt. Sind nur numerische Ergebnisse bekannt, dann ist aufgrund des Auftretens aller drei Verformungsgrößen der Versagenstyp „Biegedrillknicken“ zu identifizieren. Tritt nur eine Wegkomponente ($\eta_{cr,y}$ oder $\eta_{cr,z}$) gekoppelt mit $\eta_{cr,\varphi x}$, ein, liegt ebenfalls Biegedrillknicken vor, bei Drillknicken tritt nur $\eta_{cr,\varphi x}$ auf, während bei Biegeknicken nur $\eta_{cr,y}$ oder $\eta_{cr,z}$ (mit $\eta_{cr,\varphi x} = 0$) auftritt.

4.2.2 Biegeträger mit einfachsymmetrischem Querschnitt (Beispiel 2)

Die theoretische Lösung des kritischen Moments M_{cr} (englisch: lateral-torsional buckling moment) des mit einer mittigen Einzellast belasteten beidseitig gabelgelagerten Einfeldträgers mit einfachsymmetrischem Doppel-T-Querschnitt (Bild 7) ist als Wurzelgleichung aus der Literatur bekannt [8].

DIN-EN 1993-1-1 [1] bietet keine Formel für M_{cr} an, jedoch wurde die Lösung aus [8] in [9] aufgenommen. In Gleichung (13) wird jedoch die Schreibweise von *Kindmann* [10] verwendet:

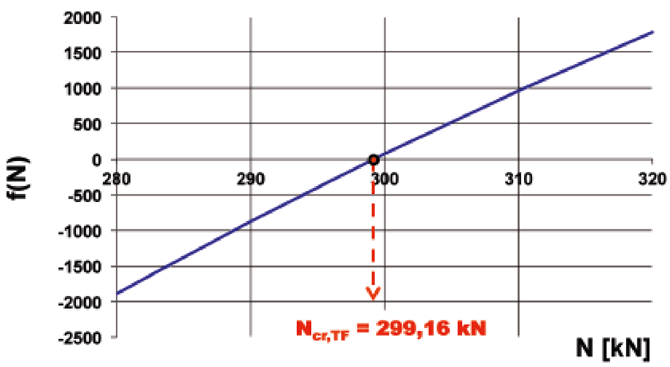
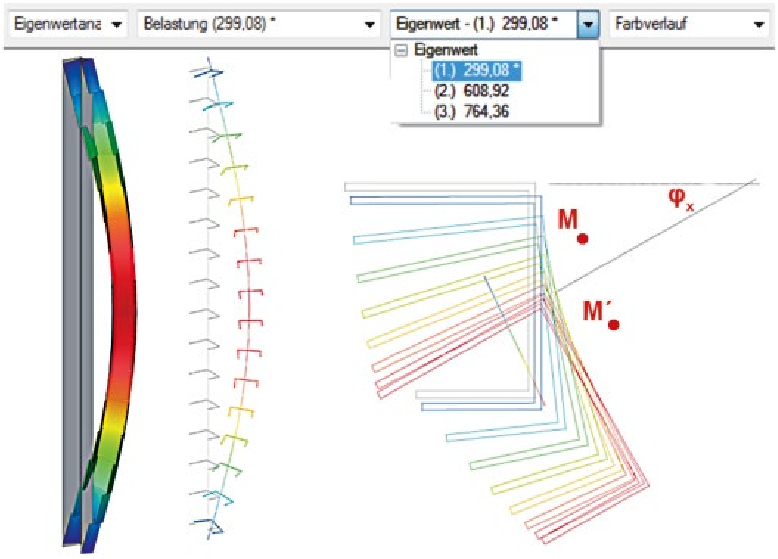


Bild 5. Nullstelle des Polynoms dritten Grades
Fig. 5. Root of the 3rd order polynomial function

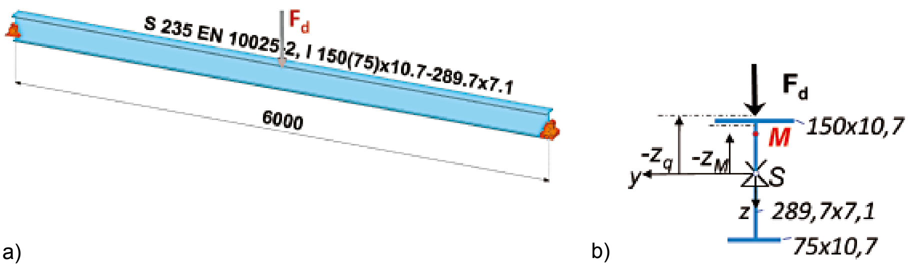
Tabelle 4. Vergleich der berechneten Biegedrillknicklasten $N_{cr,TF}$
Table 4. Comparison of the calculated critical compression forces $N_{cr,TF}$

Theorie	ConSteel	
	n	$N_{cr,TF}$ in kN
$N_{cr,TF} = 299{,}16$ kN	2	300,29
	4	299,16
	8	299,08
	32	299,08



a) b)

Bild 6. a) Verschiedene Darstellungen der Eigenform der FEM-Berechnung, b) Querschnittsbewegung in Feldmitte der Eigenform
Fig. 6. a) Different eigenform drawings of the finite element calculation, b) cross section movement of eigenform at midspan



a) b)

Bild 7. a) Gabelgelagerter Balken mit mittiger Vertikalkraft, b) einfachsymmetrischer Querschnitt
Fig. 7. a) Beam with fork supports and vertical pin load, b) mono-symmetric cross section

Analytische Berechnung:

$$M_{cr} = C_1 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{(k \cdot L)^2} \cdot \left[\sqrt{k_{23}^2 + c^2} + k_{23}\right] \tag{13}$$

mit Bild 7b:

z_q Koordinate des Angriffspunktes der Querlast (F, q etc.) im Querschnitt

z_M Koordinate des Schubmittelpunktes M

$$r_z = 0{,}5 \cdot \int_A (y^2 + z^2) \cdot \frac{z}{I_y} dA - z_M$$

$$c^2 = \frac{I_w + (k \cdot L)^2 \cdot G \cdot I_t}{I_z}$$

$$k_{23} = C_2 \cdot [z_q - z_M] + C_3 \cdot r_z$$

$k =$ 0,5 … 1,0 (0,5 eingespannte Trägerenden, 1,0 Gabellagerung)

r_z ist ein Parameter, der nur bei einfachsymmetrischen Profilen auftritt und in ([10, § 9.8.4] näher erläutert wird.

Es gibt eine Vielzahl von Publikationen über die Kalibrierungsfaktoren C_i von Gleichung (13). Eine zusammenfassende Studie findet sich in [11]. *Kindmann* stellt in [10, Tabelle 6.5] Faktoren aus der Literatur zusammen und zeigt mit [10, Tabelle 6.6], dass bei deren Verwendung für einfach symmetrische Querschnitte Vorsicht angeraten ist, weil sie z. T. zu großen Fehlern für M_{cr} führen. Die C_i-Faktoren des Systems nach Bild 7 sind [12] entnommen. Sie wurden von *Mohri* et al. auf der Basis einer analytischen Methode hergeleitet. Sie lauten: $C_1 = 1{,}36$; $C_2 = 0{,}55$; $C_3 = 0{,}41$.

Stablänge:
$L_{cr} = 6000$ cm
Knickfaktor:
$k = 1{,}0$
Materialwerte:
$E = 21000$ kN/cm², $G = 8077$ kN/cm²
Querschnittswerte:
$I_z = 339{,}4$ cm⁴, $I_t = 12{,}5$ cm⁴,
$I_w = 299858$ cm⁶
Last im Schubmittelpunkt:
$z_q - z_M = 0$, $c_1 = 1{,}36$, $c_3 = 0{,}41$

Die Versagensmomente $M_{cr,i}$ ergeben sich je nach Lastrichtung zu:

Lastrichtung nach unten
(Druckflansch oben):
$r_z = 10{,}48$ cm, $M_{cr,1} = 77{,}48$ kNm
Lastrichtung nach oben
(Druckflansch unten):
$r_z = -10{,}48$ cm, $|M_{cr,2}| = 54{,}65$ kNm

Finite Element-Berechnung:
Die mit ConSteel berechneten kritischen Momente sind in Tabelle 5 zusammengestellt. Bereits bei $n = 2$ finiten Elementen ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung. Im Beispiel 2 lautet wegen $M_{cr} = \alpha_{cr} \cdot F_d \cdot L/4 = 77{,}97 \cdot F_d \cdot 6/4$ die Querlast $F_d = 4/6 = 0{,}667$ kN. Bild 8 zeigt den Versagenszustand, der sich aus der seitlichen Verformung $\eta_{cr,y}(x)$ und $\eta_{cr,\varphi x}(x)$ zusammensetzt.

4.2.3 Elastisch dreh- und weggestützter Rahmenriegel (Beispiel 3)

In [10, §10.7.2], [13] und [36] wird von *Kindmann* und *Vette* die Stabilität eines seitlich verschieblichen Zweigelenkrahmens einer Halle untersucht. Hier wird die Eigenlösung des aus dem Rahmen herausgelösten biegedrillknickgefährdeten 19,7 m langen Rahmenriegels mit konstant angenommenem Profil IPE360 untersucht. Senkrecht zu den Riegeln spannen Trapezbleche (pfettenloses Dach). Sie wirken als gleichmäßig verteilte kontinuierliche Drehbettung (Bild 9a) $c_x = 5{,}96$ kNm/m. Zusätzlich stabilisiert ein Dachverband 9 cm oberhalb des Riegelschwerpunktes, der aus Rohrpfosten 76,1 × 4,0 und druckweichen Rundstabdiagonalen ∅ 20 mm besteht. Der Verband wird nach dem Modell von *Krahwinkel* [14] in gekoppelte Einzelfedern $C_{y,1/2} = 7{,}06$ kN/cm (Feldmitte) und $C_{y,1/4} = 9{,}41$ kN/cm (1/4-Punkten) umgesetzt. Die Wölbbehinderung infolge der Stirnplatten an den Riegelenden bei den Rahmen-

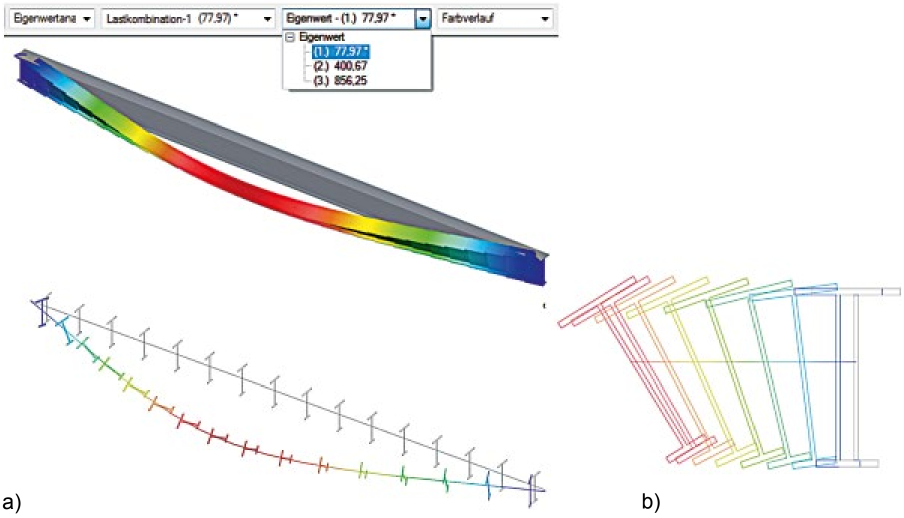
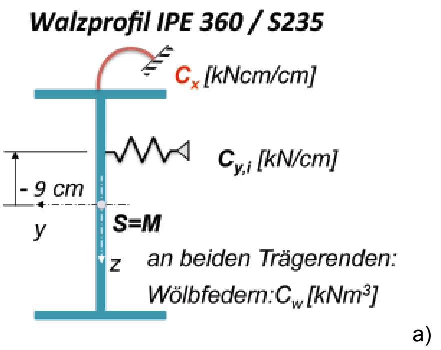


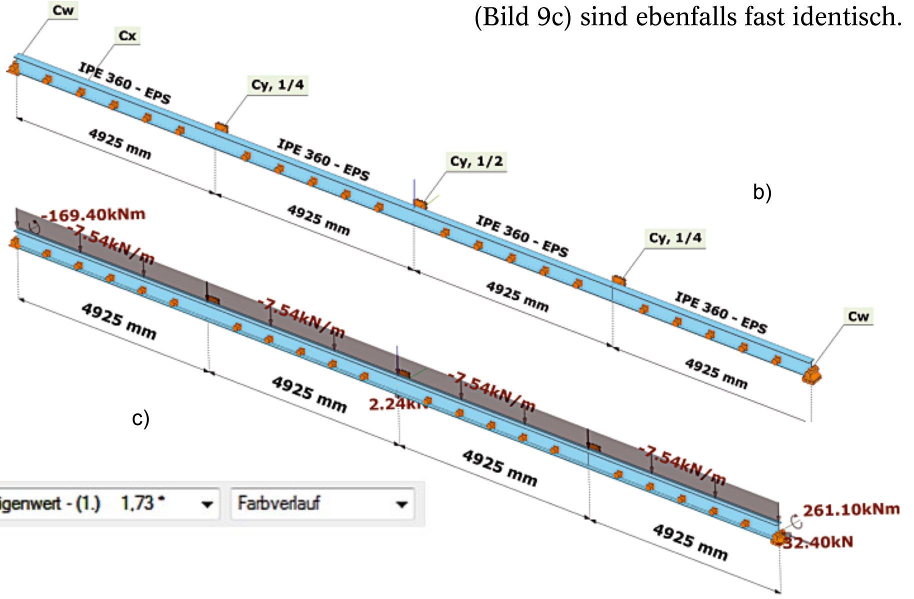
Bild 8. a) Verschiedene Darstellungen der Eigenform der FE-Berechnung, b) Querschnittsbewegung der Eigenform in Feldmitte
Fig. 8. a) Different eigenform drawings of the finite element calculation, b) cross section movement of eigenform

ecken wird als Wölbfeder mit der Steifigkeit $C_w = 24{,}91 \cdot 10^6$ kNcm^3 angenommen.

Die Einzelheiten zur Berechnung der Steifigkeiten können [36] entnommen werden. Der aus dem Rahmen herausgeschnittene Riegel ist mit konstanter vertikaler Streckenlast von 7,54 kN/m, negativen Stabendmomenten von –169,4 kNm und –261,1 kNm, einer Längsdruckkraft von 32,4 kN und schließlich mit einer in Feldmitte nach oben wirkenden vertikalen Einzellast von 2,24 kN beansprucht, die die Wirkung der Normalkraft am Firstknick des eigentlich vorhandenen Satteldachbinders simuliert [10, Bild 10.29] oder [36, Bild 2.64]. Das Struktur- und Lastmodell von ConSteel ist in den Bildern 9b und 9c dargestellt. In [36] wurde das Beispiel mit den charakteristischen Trägersteifigkeiten und mit im Vergleich zu [10] leicht veränderten (Wind-) Einwirkungen und Beanspruchungen mittels FE-STAB [4] berechnet und der Eigenwertfaktor zu $\alpha_{cr} = 1{,}713$ sowie die zugehörige Eigenformen $\eta_{cr,y}(x)$ (dort als v(x)) und $\eta_{cr,\varphi x}(x)$ (dort als $\vartheta(x)$) mitgeteilt. Zum Vergleich wurde das System auch mit dem Programm DRILL [P5] berechnet, das mit hochwertigen Hermite-Polynomen und dem Übertragungsmatrizenverfahren arbeitet.

Tabelle 6 zeigt den Vergleich der von FE-STAB, DRILL und ConSteel berechneten kritischen Lastmultiplikatoren. Es sind lediglich sehr geringe Unterschiede zwischen den DV-Programmergebnissen festzustellen. Die Eigenformen aller drei Programme (Bild 9c) sind ebenfalls fast identisch.





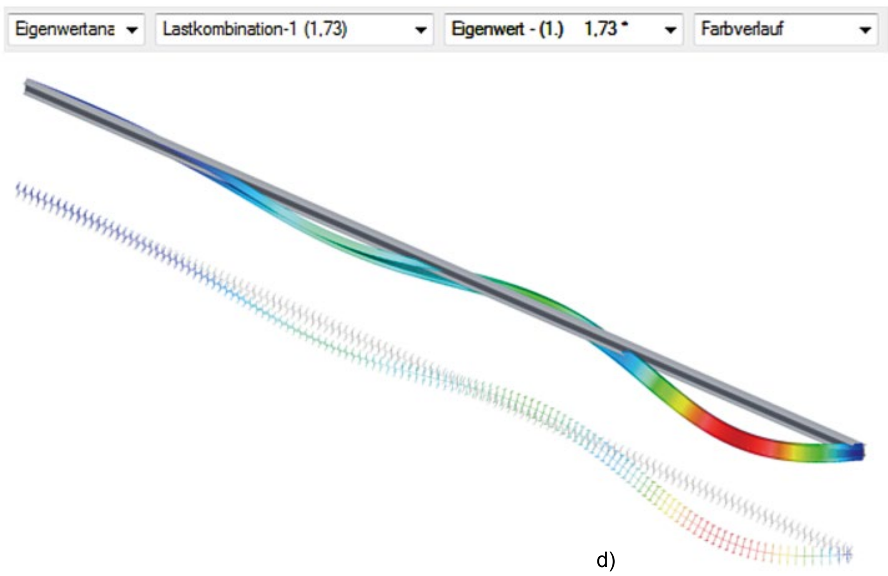


Bild 9. a) Rahmenriegel im Querschnitt mit elastischen Stabilisierungen (s. [10], Bild 10.33); b) Modell des Rahmenriegels als gabelgelagerter Träger; c) Einwirkungen des Rahmenriegels; d) Eigenwert und Eigenform des Rahmenriegels
Fig. 9. a) Rafter of the frame with elastic supports for stabilization (see [10], Fig. 10.33; b) simplified model of the rafter; c) loading of the rafter; d) buckling value and buckling shape of the rafter

Tabelle 5. Vergleich der theoretisch, mit ABAQUS und ConSteel berechneten kritischen Momente M_{cr}
Table 5. Comparison of the critical moments M_{cr} computed theoretically, by ABAQUS and ConSteel

Rechenmethode		(+) M_{cr} in kNm	(–) M_{cr} in kNm
Theorie (C_3 =0,41)		77,48	54,65
Abaqus (S8R5)		77,41	53,99
ConSteel	n =2	78,41	54,45
	n =4	78,03	53,88
	n =8	77,97	53,84
	n =32	77,97	53,82

Tabelle 6. Vergleich der kritischen Laststeigerungsfaktoren zwischen FE-Stab, DRILL und ConSteel
Table 6. Comparison of the critical load factors α_{cr} computed by FE-Stab, DRILL and ConSteel

Programm	α_{cr} [/]	Programm/ConSteel
ConSteel	1,732	1
FE-STAB [36]	1,713	0,99
DRILL (N = 4)	1,717	0,99

5 Biegetorsion des verformten Systems

5.1 Grundsätzliches

Die alternative Möglichkeit für Stabilitätsnachweise besteht grundsätzlich immer ([1], [2]) in der Anwendung der räumlichen Biegetorsionsberechnung (Tabelle 2, Methoden A2 und B2). Sie wird häufig bei Beschränkung auf kleine Verformungen auch als Theorie II. Ordnung bezeichnet. Es sind dazu geeignete geometrische Ersatzimperfektionen in das Strukturmodell aufzunehmen. ConSteel bietet auch diese Möglichkeit, wobei zu den „normalen“ Einwirkungen – je nach Tragsystem – zusätzlich globale Stabdrehwinkel und/oder parabel-/sinusförmige Vorverformungen oder die so genannte äquivalente (oder affine) Ersatzimperfektion $\eta_{init}(x)$ verwendet werden können. Diese wird aus dem zweiten Lösungsteil der klassischen Eigenlösung, der so genannten Eigenform $\eta_{cr}(x)$ (oder kritische Versagensfigur) gewonnen (s. Abschnitt 4.1).

Mit den Beanspruchungen des verformten Systems sind dann nur noch die Querschnittstragfähigkeiten des Tragwerkes nachzuweisen. Bei Verwendung eines globalen Modells (Gesamttragwerk) erübrigen sich dann weitere Stabilitätsnachweise. Kernpunkt ist dabei die korrekte Ermittlung der räumlichen Bemessungsschnittgrößen und hier insbesondere des Momentes $M_z(x)$ und des Bimomentes B(x), die beide zusätzliche Trägerlängsspannungen σ(x) erzeugen. Es sei hier an die Untersuchungen von *Gensichen* und *Lumpe* [33] erinnert, die seinerzeit viele kommerzielle Programme als fehlerhaft erkannt haben. Es ist also sehr wichtig, Ergebnissen von DV-Programmen vertrauen zu können, um korrekte Nachweise zu führen.

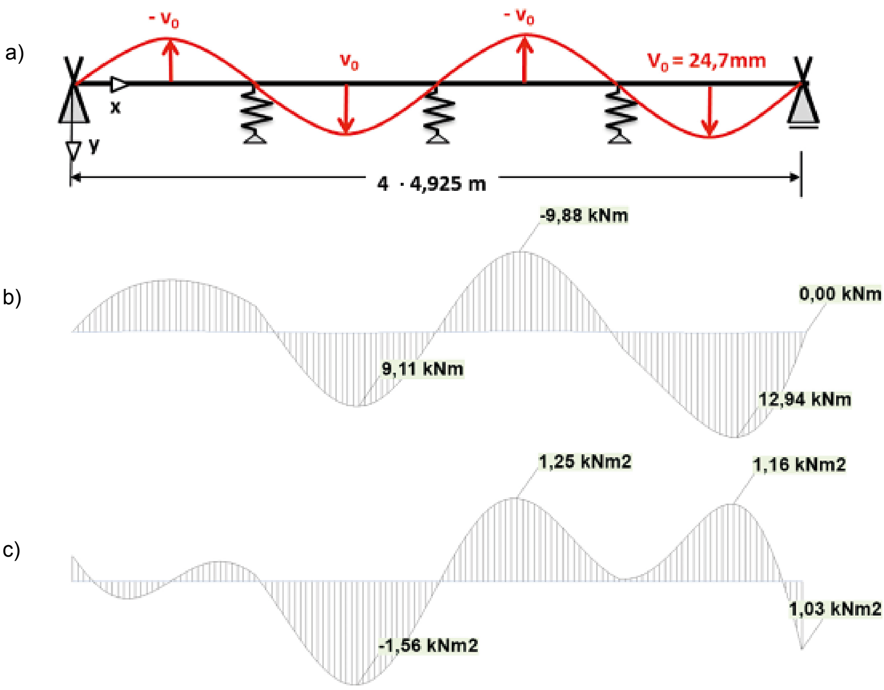


Bild 10. Ausgewählte Beanspruchungen des Systems nach Bild 9a, a) geometrische Ersatzimperfektion $v_0(x)$, b) Verlauf des Biegemomentes M_z, c) Verlauf des (Wölb-) Bimomentes B
Fig. 10. Selected internal forces of example of fig. 9a, a) geometrical initial imperfection $v_0(x)$, b) distribution of bending moment M_z, c) distribution of bimoment B

5.2 Elastisch dreh- und weggestützter Rahmenriegel (Beispiel 4)

Es werden jetzt mit ConSteel die Beanspruchungen des Rahmenriegels von Beispiel 3 (Bild 9a) unter Berücksichtigung kleiner Verformungen unter Ansatz von feldweisen parabelförmigen Vorverformungen $v_0(x)$ mit dem Stich von $v_0 \equiv e_{0,d}$ = 4925/200 = 24,7 mm berechnet und mit den Beanspruchungen $M_z(x)$ und B(x) aus [36] verglichen, die mittels FE-STAB [P4] mit charakteristischen Steifigkeiten ermittelt wurden.

Der Verlauf der Beanspruchungen (Bild 10) beider Berechnungen ist nahezu identisch, allerdings gibt es geringe Abweichungen der bereichsweisen Extremwerte der Stellen 1, 2 und 3, die sich u. a. auf geringfügig unterschiedliche Querschnittswerte und Elementierungen zurückführen lassen.

6 Die „Allgemeine Methode“ von DIN EN 1993-1-1

6.1 Grundsätzliches

Die Ersatzstabnachweise gegen Biegedrillknicken einfacher Systeme bei gemischter Beanspruchung N⊕My (⊕ Mz) (s. Tabelle 2, Fall A1) erfreuten sich bisher in Deutschland bei Anwendung der bereits zurückge-

Tabelle 7. Vergleich der mit FE-STAB, DRILL und ConSteel berechneten Beanspruchungen
Table 7. Comparison of the internal forces computed by FE-STAB, DRILL and ConSteel

Programm	M_z in kNm bei Stelle				B in kNm^2 bei Stelle			
	1	2	3	4	1	2	3	4
ConSteel	–9,11	9,88	–12,94	0	1,56	–1,25	–1,16	1,03
FE-STAB [36]	–9,22	10,03	–13,24	0	1,51	–1,23	–1,27	1,13
DRILL*)	–9,27	10,13	–13,42	0	1,60	–1,31	–1,24	1,14

*) eigene Berechnung

zogenen DIN 18800-2 gewisser Beliebtheit, da sie noch per Handrechnung durchzuführen und einigermaßen übersichtlich gestaltet waren. Zudem waren sie für eine begrenzte (meistens baupraktische ausreichende) Anzahl von Trägertypen (z. B. mit Vouten) anwendbar. Auch war der Ansatz der Beanspruchungen nach Theorie 1. Ordnung bequem. Sie wurden meist der alternativen Nachweismethode der Biegetorsionstheorie des verformten Systems vorgezogen, weil analytische Formeln für die Beanspruchungen weitgehend fehlen und insbesondere der Ansatz der notwendigen räumlichen Imperfektionen (Form und Größe) nicht deutlich geregelt war.

DIN EN 1993-1-1 bietet jetzt ein erweitertes und genaueres Nachweiskonzept des Ersatzstabverfahrens mit den Nachweisformaten nach Abschnitt 6.3.3, Gleichungen (6.61) und (6.62). Leider gelten die Formeln nur unter sehr einschränkenden Bedingungen:

- Der Träger muss geradlinig und eben sein.
- Der Träger darf über die gesamte Länge nur konstanten Querschnitt besitzen.
- Nur doppeltsymmetrische Querschnitte sind zugelassen (s. [15] für einfach symmetrische Querschnitte).
- Der Träger muss beidseitig gabellagert sein.
- Bei Zwischenstützungen müssen beide Gurte seitliche Halterung besitzen oder muss eine biegesteif angeschlossene seitliche Halterung mit verdrehsteifer Stabilisierung (z. B. durch Schott) vorhanden sein.
- Es sind zwar auch elastische Seiten- und Drehzwischenlagerungen oder nur die seitliche Halterung eines Gurtes möglich, allerdings muss dann max $|M_{cr}|$ wegen fehlender analytischer Lösungen als numerische Lösung ermittelt werden.
- Bei Zwischenstützungen ist der Parameter C_{mLT} ([1], Anhang B) für jeden Trägerabschnitt zu bestimmen, was aufwendig und fehleranfällig ist; max C_{mLT} ist für den Gesamtstab maßgebend und der Beiwert k_c gilt für den Teilstab von max C_{mLT}.

Die zahlreichen Einschränkungen der Nachweise nach [1], Abschnitt 6.3.3 können durch Anwendung des – in Deutschland bisher weitgehend unbekannten – so genannten „Allgemeinen Verfahrens“ nach Abschnitt 6.3.4 aufgehoben werden. Will man auf Nachweise mit Torsion und Querbiegung erzeugende seitliche Ersatzimperfektionen (s. Tabelle 2, Fall A2) verzichten, dann ist die Anwendung dieser Nachweismethode geradezu zwingend, um wirtschaftliche Konstruktionen zu erzielen. Der Begriff „Allgemeine Methode“ ist allerdings fragwürdig und auch irreführend. Das Nachweiskonzept hebt zwar die Einschränkungen von Abschnitt 6.3.3 weitgehend auf, allerdings ist sie – streng genommen – beschränkt auf eine Beanspruchungskombination $N \oplus M_y$. Da sie für beliebige Tragstrukturen (z. B. geknickte Träger, Rahmen und auch räumliche Tragsysteme und beliebige Lagerungsbedingungen) anwendbar ist, wäre vielleicht die Bezeichnung „Erweiterte Methode“, „Verallgemeinerte Methode“ oder „Globale Methode“ sinnvoller. Dieses Nachweiskonzept ist gerade für komplexere integrierte 2D- und 3D-Tragmodelle besonders interessant.

6.2 Historische Entwicklung der „Allgemeinen Methode“

Die grundlegende Idee, das Prinzip der „Allgemeinen Methode” für die Stabstatik anzuwenden, publizierte erstmals *Papp* ([16], [17]) in den 1990ern. Darauf basierend wurde bereits vor ca. 15 Jahren eine entsprechende standardisierte Nachweismethode in der auf der deutschen DIN basierenden ungarischen Norm als alternative Prozedur zum Nachweis der allgemeinen Stabilität [18] eingeführt. Später wurde die Methode von *Müller* und *Sedlacek* ([19], [20]) für die Stabilitätsanalyse von Rahmen erweitert und eine Sicherheitsstudie zur Verifikation ihrer Zuverlässigkeit durchgeführt. Die grundsätzlichen Bedingungen der mechanisch begründeten Ableitungen erschienen erstmals in den Dissertationen von *Szalai* [21] und *Stangenberg* [22]. Die Arbeiten ermöglichten die Erstellung eines geeigneten Modells und konsistenter Prozeduren für die Bestimmung der Reduktionfaktoren dieser Methode. Von *Szalai* und *Papp* wurde in [23] ein geeignetes Format für die Abminderungsfaktoren χ und χ_{LT} im Falle kombinierter Druck- und Biegebeanspruchung für den interaktiven Tragfähigkeitsnachweis entwickelt. Von *Naumes* wurde diese Methode in [24] und in [25] auch für nicht konstante Querschnitte und Lastarten sowie für Biegung um die schwache Achse erweitert. Neben den theoretischen Arbeiten wurde sie auch hinsichtlich ihrer mechanischen oder probabilistischen Kalibrierung, Verifikation und für Benchmarks benutzt und dabei ihre Gleichberechtigung und Eignung im Vergleich zu anderen Nachweisformaten gegen Stabilitätsversagen nachgewiesen ([26] bis [29]). Darüber hinaus ist die „Allgemeine Methode“ des Stabilitätsnachweises der Stabstatik formal kompatibel mit dem in DIN EN 1993-1-5 [30] verankerten Beulnachweis für Platten, der ebenfalls eine globale Schlankheit aus dem gemischten Spannungsfeld der Scheibe ermittelt und dann von der Spannungsart (σ, τ etc.) abhängige Abminderungsfaktoren verwendet (z. B. [31, Abschnitt 2.2]).

6.3 Einführung in die allgemeine Formulierung

Die Grundidee dieser Methode ist die Nutzung der Ergebnisse der globalen elastischen Stabilitätsanalyse (Beispiel 5 in Abschnitt 6.4) als Standard der integrierten Nachweismethodik (Tabelle 2, B2). Damit erübrigt es sich, die kritischen Druckkräfte N_{cr} (Biege-(Drill)knicklasten) und kritischen Momente M_{cr} separat zu berechnen, die – jede für sich genommen – bei gemischter Beanspruchung $N \oplus M_y$ unkorrekt sind. Statt dessen werden die komplexe Schnittgrößenverteilung aller Stäbe des Strukturmodells ermittelt und dann mit dem gleichen Strukturmodell direkt die kritischen Lastfaktoren $\alpha_{cr,i}$ für das Systemversagen (natürlich auch bei Einzelstäben) ermittelt. Konsequenterweise ergibt sich nur eine (System-) Schlankheit (Gl. (21)). Damit können dann – je nach Schnittgröße N oder M_y unterschiedliche – Abminderungsfaktoren mit den entsprechenden Vorschriften von [1] für den Systemnachweis (Gl. (22)) berechnet werden. Dies kann man auch als natürlichen (mechanisch korrekten) Stabilitätsnachweis betrachten, der auch einfacher und übersichtlicher als die Ersatzstabnachweise mit den Gleichungen (6.61) und (6.62) ist.

Um den Ursprung der verblüffend einfachen grundlegenden Nachweisformel (18) besser verstehen zu können, betrachtet man den Nachweis des Druckstabes (alternativ des Biegestabes mit M_y):

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} \leq 1{,}0 \quad \text{mit} \quad N_{b,Rd} = \chi \cdot \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} \tag{14}$$

Der Abminderungsfaktor χ in Gl. (14) hängt von der Stabschlankheit $\bar{\lambda}$ ab:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}} \Rightarrow \chi \tag{15}$$

Gl. (14) kann leicht in Gl. (16) umgeformt werden:

$$\frac{\chi \cdot \dfrac{A \cdot f_y}{N_{Ed}}}{\gamma_{M1}} \geq 1{,}0 \tag{16}$$

Durch Einsetzen des Lastvergrößerungsfaktors $\alpha_{ult,k}$ (s. Tabelle 1)

$$\alpha_{ult,k} = \frac{A \cdot f_y}{N_{Ed}} \geq 1{,}0 \tag{17}$$

in Gl. (16) ergibt sich bereits die grundlegende Nachweisgleichung (18) der allgemeinen Nachweismethode:

$$\frac{\chi \cdot \alpha_{ult,k}}{\gamma_{M1}} \geq 1{,}0 \tag{18}$$

Bei reiner Biegung können in Gl. (15) und (16) W_y anstelle von A, M_{cr} statt N_{cr} und $\bar{\lambda}_{LT}$ anstelle von $\bar{\lambda}$ sowie in Gl. (16) und (18) χ_{LT} anstatt χ gesetzt werden. Man erhält damit die Nachweisformel des Biegedrillknickens von [1]:

$$\frac{\chi_{LT} \cdot \alpha_{ult,k}}{\gamma_{M1}} \geq 1{,}0 \quad \text{mit}$$
$$\alpha_{ult,k} = \frac{W_y \cdot f_y}{M_{y,Ed}} \quad \text{und} \tag{19}$$
$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_y \cdot f_y}{M_{cr}}} \Rightarrow \chi_{LT}$$

Das Nachweisschema der „Allgemeinen Methode" Stabilitätsversagen aus der Ebene (Biegedrillknicken unter gemischter Beanspruchung, englisch: out of plane (op)) erhält man durch Verallgemeinerung der Nachweisparameter für die Interaktion $N \oplus M_y$:

verallgemeinerter Vergrößerungsfaktor:

$$\alpha_{ult,k} = \frac{1}{\dfrac{N_{Ed}}{A \cdot f_y} + \dfrac{M_{y,Ed}}{W_y \cdot f_y}} \geq 1{,}0 \tag{20}$$

verallgemeinerte Schlankheit:

$$\bar{\lambda}_{op} = \sqrt{\frac{\alpha_{ult,k}}{\alpha_{cr,op}}} \Rightarrow \chi; \chi_{LT} \tag{21}$$

mit $\alpha_{cr,op}$ als kritischem Steigerungsfaktor (Abschnitt 4, Gl. (9))

allgemeine Nachweisform:

$$\frac{\chi_{op} \cdot \alpha_{ult,k}}{\gamma_{M1}} \geq 1{,}0 \quad \text{mit}$$
$$\chi_{op} = \min\left[\chi; \chi_{LT}\right] \tag{22}$$

oder weniger konservativ

$$\frac{N_{Ed}}{\chi \cdot A \cdot f_y / \gamma_{M1}} + \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \cdot W_y \cdot f_y / \gamma_{M1}} \tag{23}$$

Hinweis zu $\alpha_{ult,k}$:
Dieser Faktor berücksichtigt die Stabilitätseinflüsse des Biegeknickens in der Substrukturebene. Deshalb sind die notwendigen Ersatzimperfektionen für das Biegeknicken in der Substrukturebene anzusetzen und die Schnittgrößen (insbesondere $M_y(x)$) – falls erforderlich – unter Berücksichtigung der Verformungen zu berechnen.

6.4 Knickstütze mit kombinierter Einwirkung (Beispiel 5)

Die Anwendung der „Allgemeinen Methode" wird an einer einfachen beidseitig gabelgelagerten Knickstütze (HEA 400) mit zusätzlichem Randmoment (dreieckige Momentenlinie nach Theorie 1. Ordnung) und unter Ansatz einer Sinushalbwelle als Vorverformung $w_0(x)$ in der Stabebene gezeigt (Bild 11). Während der Ersatzstabnachweis (6.62) mit der Momentenlinie M_y nach Theorie 1. Ordnung (Bild 11b) auskommt, benötigt die „Allgemeinen Methode" die Momente des verformten Systems (Bild 11c) mit Ansatz der Vorverformung(en). Allerdings hat dies in diesem Beispiel keine Bedeutung, da beide Momentenlinien ihr Maximum am Stützenkopf haben.

In Tabelle 8 ist die Nachweissystematik nach dem Ersatzstabverfahren [1, Formel (6.62)] (Tabelle 2, Fall A1) und der integrierten Vorgehensweise mit Hilfe der „Allgemeinen Methode" [1, Formeln (6.65) und (6.66)] (Tabelle 2, Fall A2) gegenübergestellt. Die Nachweise in Zeile 7 wurden nach [1b] mit $\gamma_M = 1{,}1$ geführt.

Der entscheidende Unterschied zur Bestimmung des kritischen Systemzustandes (Schritt 3) ist bei der integrierten Nachweismethode, dass die Versagensmechanismen nicht künstlich separiert sondern statt dessen der globale Vergrößerungsfaktor $\alpha_{cr,op}$ benutzt wird, der bereits in natürlicher Weise die Interaktionen aller Stabilitätseffekte enthält. Demzufolge wird nur eine Schlankheit ermittelt (Schritt 4) und es besteht keine Notwendigkeit zu Interaktionsfaktoren (Schritt 7). Letztlich zeigen sich sehr gut übereinstimmende Auslastungen (Schritt 7) mit dem Nachweis [1, (6.66)] und – wie auch in vielen weiteren Vergleichsrechnungen bereits nachgewiesen – ergibt die „Allgemeinen Methode" nach § 6.3.4 etwas konservativere Ergebnisse (sichere Seite!). Zusätzlich wird in Zeile 7 der Nachweis nach [1, (6.65)] geführt, der (leider) nach [1b] anstelle von (6.66) einschränkend verlangt wird. Das Ergebnis ist etwa 10 %

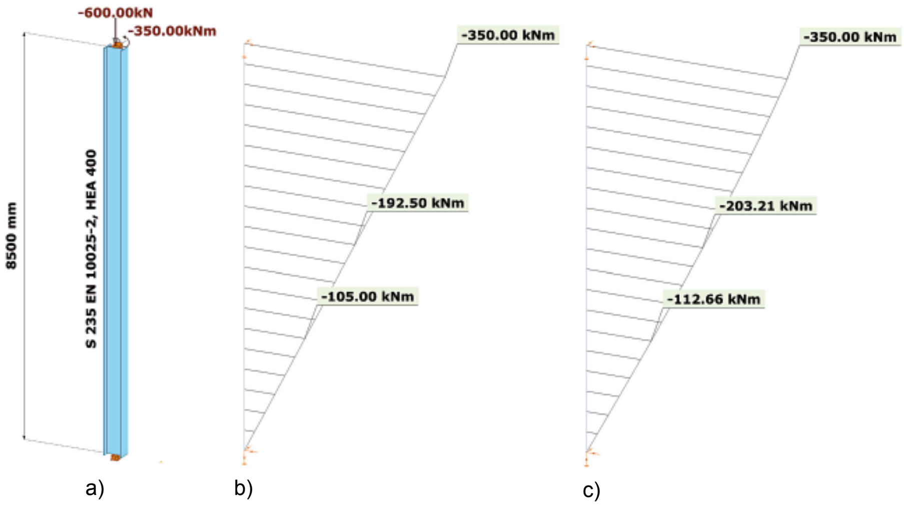


Bild 11. a) Statisches Modell und Belastung der Stütze, b) Momente M_y des unverformten Systems, c)Momente M_y des verformten Systems
Fig. 11. a) Column subjected to compression and bending, b) distribution of moment M_y according 1. order calculation, c) distribution of moment M_y according 2. order calculation

konservativer und damit unwirtschaftlicher. Die mehr als zehnjährige Erfahrung der Anwendung von [1, (6.66)] in Ungarn zeigt allerdings, dass die Einschränkung nach [1b] unnötig ist!

Da die „Allgemeine Methode" in analoger Art und Weise für jedwede 2D- sowie 3D-Tragstrukturen und Einwirkungsarten anwendbar ist, die in stabilitätssensiblen Bereichen überwiegend die Beanspruchungskombination N⊕M aufweisen, werden die Unsicherheiten bei der konventionellen Tragwerksaufteilung, der Separation der einzelnen Versagensformen (Knicken, Biegedrillknicken etc.) und der Bestimmung einer Vielzahl von Parametern (kritische Längen, Momentengradient-Faktoren und Interaktionsfaktoren) elegant eliminiert.

Tabelle 8. Biegedrillknicknachweise einer Stütze im Vergleich
Table 8. Comparison of buckling design of a column with compression and bending

Berechnungsschritt		klassisches Ersatzstabverfahren nach [1, Abschnitt 6.3.3]	Allgemeine Methode nach [1, Abschnitt 6.3.4]
Nr.	Bezeichnung		
1a	Vorverformung: Halbwelle mit $e_{0,d}$	keine	$e_{0,d} = 850/250 = 3{,}40$ cm [1a, Tab. 5.1] $e_{0,d} = 850/478 = 1{,}78$ cm [1b, Tab. NA.1] $e_{0,d} = 850/500 = 1{,}70$ cm [32, Tab. 7.2]
1b	Beanspruchungen	$N_{Ed} = 600$ kN max $M_{y,Ed} = 350$ kNm (Th. 1. Ordnung)	$N_{Ed} = 600$ kN max $M_{y,Ed} = 350$ kNm (Th. 2. Ordnung)
2	Querschnittstragfähigkeiten	$N_{c,Rk} = 3736$ kN (6.10)–(6.11) $M_{c,Rk} = 602$ kNm (6.13)–(6.15)	$\alpha_{ult,k} = \dfrac{1}{\dfrac{600}{3736}+\dfrac{350}{602}} = 1{,}348$ (6.65)
3	kritische Zustände	$N_{cr} = 2450$ kN § 6.3.1.2(1) $M_{cr} = 1414$ kNm § 6.3.2.2(2)	ConSteel: $\alpha_{cr,op} = 2{,}42$ § 6.3.4(3)
4	Schlankheiten	$\bar{\lambda}_z = \sqrt{\dfrac{N_{c,Rk}}{N_{cr}}} = 1{,}235$ § 6.3.1.2(1) $\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\dfrac{M_{c,Rk}}{M_{cr}}} = 0{,}653$ § 6.3.2.2(2)	$\bar{\lambda}_{op} = \sqrt{\dfrac{\alpha_{ult,k}}{\alpha_{cr,op}}} = \sqrt{\dfrac{1{,}348}{2{,}42}} = 0{,}746$ (6.64)
5	Abminderungsfaktoren	$\chi_z(\bar{\lambda}_z, b) = 0{,}460$ (6.49) $\chi_{LT}(\bar{\lambda}_{LT}, b) = 1{,}00$ (6.57)	$\chi_z(\bar{\lambda}_{op}, b) = 0{,}757$ (6.49) $\chi_{LT}(\bar{\lambda}_{op}, b) = 0{,}846$ (6.57) $\chi_{op} = \min[\chi_z, \chi_{LT}] = 0{,}757$
6	Interaktionsfaktor	$k_{zy} = 0{,}89$ [1a, Anhang B]	–
7	Stabilitätsnachweis	$\dfrac{N_{Ed}}{\dfrac{\chi_z \cdot N_{c,Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{zy}\dfrac{M_{y,Ed}}{\dfrac{\chi_{LT} \cdot M_{c,Rk}}{\gamma_{M1}}} = 0{,}954$ (6.62)	$\dfrac{N_{Ed}}{\dfrac{\chi_z \cdot N_{c,Rk}}{\gamma_{M1}}} + \dfrac{M_{y,Ed}}{\dfrac{\chi_{LT} \cdot M_{c,Rk}}{\gamma_{M1}}} = 0{,}989$ (6.66) $\dfrac{N_{Ed}}{\dfrac{\chi_{op} \cdot N_{c,Rk}}{\gamma_{M1}}} + \dfrac{M_{y,Ed}}{\dfrac{\chi_{op} \cdot M_{c,Rk}}{\gamma_{M1}}} = 1{,}078$ (6.65)
Hinweis: die Formelnummern und Abschnittsverweise beziehen sich auf [1]			

Ausblick auf die Teile 2 und 3 des Aufsatzes

In Teil 2 werden die zusätzlichen Bestimmungen des Deutschen Nationalen Anhangs [1b] zur Anwendung der „Allgemeinen Methode“ kommentiert, die aus der Sicht der Autoren dieses Beitrags z. T. unklar, aber auch unnötig einschränkend sind und damit auch zu unwirtschaftlichen Ergebnissen führen können. Die Teile zwei und drei fokussieren sich auf die mit ConSteel realisierbare integrative Methode der Stabilitätsnachweise (Tabelle 2, Fälle B1 und B2) von komplexeren Stahlkonstruktionen mit sich gegenseitig beeinflussenden Teilstrukturen.

Literatur

[1a] DIN EN 1993-1-1:2010: Eurocode 3; Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten – Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau. Beuth-Verlag GmbH.

[1b] DIN EN 1993-1-1/NA:2010: Nationaler Anhang zu [1a].

[2] *Kuhlmann, U., Froschmeier, B., Euler, M.*: Allgemeine Bemessungsregeln, Erläuterungen zur Struktur und Anwendung von DIN EN 1993-1-1. Stahlbau 79 (2010), Heft 11, S. 779–792.

[3] *Kindmann, R., Ludwig, C.*: Zur Tragfähigkeit von Stabquerschnitten nach DIN EN 1993-1-1. Stahlbau 81 (2012), Heft 4, S. 257–264 und 5, S. 353–357.

[4] *Chen, W., Atsuta, T.*: Theory of Beam-Columns. Vol. 2: Space Behavior and Design. McGraw-Hill, 1977.

[5] *Kindmann, R., Kraus, M.*: Finite-Element-Methoden im Stahlbau. Berlin: Verlag Ernst & Sohn 2007.

[6] *Roik, K. ,Carl, J., Lindner, J.*: Biegetorsionsprobleme gerader dünnwandiger Stäbe. Berlin: Verlag Ernst & Sohn 1972.

[7] *Trahair, N. S.*: Flexural-torsional buckling of structures. London: E & FN SPON 1993.

[8] *Clark, J. W., Hill, H. N.*: Lateral buckling of beams. Proc. ASCE, ST7, 1960, S. 175–190.

[9] *Boissonnade, N., Greiner, R., Jaspart, J. P., Lindner, J.*: Rules for Member Stability in EN 1993-1-1 – Background documentation and design guidelines. ECCS Technical Committee – Stability, No. 119, 2006, p. 229.

[10] *Kindmann, R.*: Stahlbau –Teil 2: Stabilität und Theorie 2. Ordnung. Berlin: Verlag Ernst & Sohn 2007.

[11] *Silva, L. S., Canha, J., Marques, L.*: Comparison between C factors for determination of the elastic critical moment of steel beams. ECCS Technical Committee – Stability. Working Paper of the meeting in Stuttgart, Germany, 21. Juni 2013.

[12] *Mohri, F., Brouki, A., Roth, J. C.*: Theoretical and numerical amalyses of unrestrained, mono-symmetric thin-walled beams. Constructional Steel Research 59 (2003), pp. 63–90.

[13] *Kindmann, R., Vette, J.*: Stresses in bracings due to lateral torsional buckling of beams. NSCC 2009, pp. 394–439.

[14] *Krahwinkel, M.*: Zur Beanspruchung stabilisierender Konstruktionen im Stahlbau. VDI-Bericht Reihe 4 Nr. 166. VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf 2001.

[15] *Greiner, R., Kaim, P.*: Erweiterung der Traglastuntersuchungen an Stäben unter Druck und Biegung auf einfachsymmetrische Querschnitte. Stahlbau 72 (2003), S. 173–180.

[16] *Papp, F.*: Computer Aided Design of Steel Beam-Column Structures. PhD Dissertation. Budapest University of Technology and Economics/Heriott-Watt University, Edinburgh, 1994.

[17] *Papp, F.*: An automatic procedure for computer aided design of steel beam-column strucures. Journal of Constructional Steel Research 46 (1998), pp. 380–381.

[18] MSZ ENV 1993-1-1 NAD: Hungarian National Application Document for Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1-1: General rules. General rules and rules for buildings, 2001.

[19] *Müller, C.*: Zum Nachweis ebener Tragwerke aus Stahl gegen seitliches Ausweichen. RWTH Aachen, Instituts-Bericht Nr. 46, PhD Dissertation, 2003, Aachen: Shaker Verlag.

[20] *Sedlacek, G., Müller, C.*: Zur Vereinheitlichung der Stabilitätsregeln im Eurocode 3. Stahlbau 73 (2004), S. 733–744.

[21] *Szalai, J.*: Analysis of the resistance of steel beam-columns on probabilistic basis. PhD Dissertation, Budapest University of Technology and Economics, 2005.

[22] *Stangenberg, H.*: Zum Bauteilnachweis offener stabilitätsgefährdeter Stahlbauprofile unter Einbeziehung seitlicher Beanspruchungen und Torsion. RWTH Aachen, Instituts-Bericht Nr. 61, PhD Dissertation, 2007, Aachen: Shaker Verlag.

[23] *Szalai, J, Papp, F.*: On the theoretical background of the generalization of Ayrton-Perry type resistance formulas. Journal of Constructional Steel Research 66 (2010), pp. 670–679.

[24] *Naumes, J.*: Biegeknicken und Biegedrillknicken von Stäben und Stabsystemen auf einheitlicher Grundlage. RWTH Aachen University, Instituts-Bericht Nr. 70, PhD Dissertation, 2009, Aachen: Shaker Verlag.

[25] *Naumes, J., Strohmann, I., Ungermann, D., Sedlacek, G.*: Die neuen Stabilitätsnachweise im Stahlbau nach Eurocode 3. Stahlbau 77 (2008), Heft 10, S. 748–760.

[26] *Bijlaard, F., Feldmann, M., Naumes, J., Sedlacek, G.*: The “general method” for assessing the out-of-plane stability of structural members and frames and the comparison with alternative rules in EN 1993 – Eurocode 3 – Part 1-1. Steel Construction 3 (2010), pp. 19–33.

[27] *Wieschollek, M., Feldmann, M., Szalai, J., Sedlacek, G.*: Biege- und Biegedrillknicknachweise nach Eurocode 3 anhand von Berechnungen nach Theorie 2. Ordnung. Stahlbau 81 (2012), S. 1–12.

[28] *Marques, L., Simões da Silva, L., Rebelo, C.*: Numerical validation of the general method in EC3-1-1 – lateral and lateral-torsional buckling of non-uniform members. 5th European Conference on Steel and Composite Structures. Eurosteel 2008, Graz.

[29] *Simões da Silva, L., Marques, L., Rebelo, C.*: Numerical validation of the general method in EC3-1-1 for prismatic members. Journal of Constructional Steel Research 66 (2010), pp. 575–590.

[30] DIN EN 1993-1-5:2005: Eurocode 3; Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten – Teil 1-5: Plattenförmige Bauteile. DIN EN 1993-1-5/NA:2010: Nationaler Anhang. Beuth-Verlag GmbH.

[31] *Hillebrecht, V., Rubert, A., Strutzke, M.*: b/t-Interaktionsdiagramme zum vereinfachten Beulsicherheitsnachweis nach DIN EN 1993-1-5 für Platten aller Baustahlsorten. Stahlbau 81 (2012), Heft 5, S. 358–365.

[32] *Wolf, C.*: Tragfähigkeit von Stäben aus Baustahl – Nichtlineares Tragverhalten, Stabilität, Nachweisverfahren. PhD Dissertation, RU Bochum 2006.

[33] *Gensichen, V., Lumpe, G.*: Zur Leistungsfähigkeit, Kontrolle und korrekten Anwendung von EDV-Programmen für die Berechnung räumlicher Tragwerke im Stahlbau. Teil 1: Stahlbau 77 (2008), Heft 6, S. 447–453. Teil 2: Stahlbau 77 (2008), Heft 7, S. 531–537. Teil 3: Stahlbau 77 (2008), Heft 8, S. 608–613.

[34] *Kindmann, R.*: Stahlbau, Teil 1: Grundlagen. Berlin: Verlag Ernst & Sohn 2013.

[35] *Wagenknecht, G.*: Stahlbau-Praxis nach Eurocode. Band 1, Berlin: Beuth Verlag GmbH, Ergänzung zur 4. Auflage, www.beuth.de, 5. Auflage, erscheint 2014.

[36] *Kindmann, R., Vette, J.*: Seminar zur Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten nach Eurocode 3, Teile 1-1

und 1-8. Dortmund 14.6.2012. Ingenieurakademie West e.V.

[37] *Gensichen, V., Lumpe, G.*: Theorie II. und III. Ordnung – die großen Missverständnisse. Stahlbau 82 (2013), Heft 10, S. 762–774.

[P1] ConSteel: Strukturanalyse und -design Software. www.ConSteelsoftware.com

[P2] SCIA Statiksoftware: http://www.scia-software.de

[P3] RSTAB: http://www.dlubal.de

[P4] KSTAB, FE-STAB: http://www.ruhr-uni-bochum.de/stahlbau/software/software.html.de

[P5] DRILL: http://www.fides-dvp.de/statik-hersteller/fides/stahlbau-software/drill

Autoren dieses Beitrages:
Prof. Dr.-Ing. Ferenc Papp,
Budapest University of Technology and Economics,
Department of Structural Engineering,
Müegyetem rakpart 3. Kmf. 85,
H-1111 Budapest,
fpapp@epito.bme.hu

Prof. Dr.-Ing. Achim Rubert,
HAWK Hochschule für angewandte Wissenschaft und Kunst
(University of Applied Sciences and Arts),
Hildesheim/Holzminden/Göttingen,
Fachgebiet Baustatik und Stahlbau,
Haarmannplatz 3,
D-37603 Holzminden und
Hohnsen 2,
D-31134 Hildesheim,
rubert@hawk-hhg.de

Dr.-Ing. Josef Szalai,
ConSteel Solutions Ltd.,
Mester utca 87.,
H-1095 Budapest,
jozsef.szalai@ConSteelsoftware.com